



Р. РАФАТОВ, А. АСАНОВ, М. Ш. МАМАЮСУПОВ



Алымкулов К.А.

Жогорку математика боюнча окума

5-бөлүк Электрондук окуу китеп



- КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР
- ФУРЬЕНИН ЖАНА ЛАПЛАСТЫН ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮЛӨРҮ
- ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР



Ош-2018

УДК 51

ББК 22.11

Р 26

Китеп Ош мамлекеттик университетинин «Жогорку математика» кафедрасында даярдалып, Билим берүү жана Илим министрлигинин № 1107/1 (25.12.14) буйругу менен расмий окуу китеби катарында таанылган.

Редактору: п.и.к., доцент А.Аттокурова

Рецензенттер: ф.м.-и.д., профессорлор Ж.Сатаров, И.Ташполотов

Окумалардын топтомун түзгөндөр Рафатов Р., Асанов А., Мамаюсупов М. Ш.

Р 26 Жогорку математика боюнча окума (5 – бөлүк): Электрондук окуу китеби. – Ош: 2014, 2018. – 380 б.

ISBN 978 – 9967 – 18 – 002 – 4

«Жогорку математика боюнча окума» электрондук окуу китебинин 5 -бөлүгү жогорку окуу жайларда окутулуучу дифференциалдык теңдемелер, жогорку жана колдонмо математика сабактарын өздөштүрүүчү студенттерге, изденүүчүлөргө жана окутуучуларга арналган. [Китептин электрондук вариантын ОшМУ нун жана \[www.okuma.kg\]\(http://www.okuma.kg\) сайттарынан окууга болот.](#)

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика кафедрасы.

Электрондук дарек: mamaiusupov.m@gmail.com

Р 1602010000 – 14

УДК 51

ISBN 978 – 9967 – 18 – 002 – 4

ББК 22.11

@ Рафатов Р., Асанова А., Мамаюсупов М.Ш., 2014

МАЗМУНУ

Оглавление

Галилей.....	8
XVIII ГЛАВА. КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР.....	8
§18.1 Дифференциалдык теңдемелер жөнүндө негизги түшүнүктөр.....	8
1. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	20
§ 18.2 Биринчи тартиптеги квадратуралануучу (таблицалык интегралга келүүчү) дифференциалдык теңдемелер.....	22
18.2.1 Өзгөрүлмөлөрү ажыралма дифференциалдык теңдемелер.....	22
2. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	24
18.2.2 Бирдей тектүү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер.....	26
Мисалдар	28
3. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	30
18.2.3 Толук дифференциалдуу дифференциалдык теңдемелер. Интегралдоочу көбөйтүүчү.....	31
Мисалдар	34
4. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	37
18.2.4 Биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер. Турактууну вариациялоо усулу.....	38
5. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	42
18.2.5 Риккатинин теңдемеси.....	43
18.2.6 Бернуллинин теңдемеси.....	44
§18.3 $y' = f(x, y)$ теңдемесин жакындаштырып интегралдоо усулдары.....	47
18.3.1 Изоклиндер усулу.....	47
18.3.2 Ырааттуу жакындашуу ыкмасы.....	50
18.3.3 Кошинин маселесин сандык эсептөөлөр аркылуу чыгаруу.....	52
1. Эйлердин ыкмасы.....	52
2. Рунге - Куттанын ыкмасы.....	59
6. КӨНҮГҮҮЛӨР.....	59
§18.4 Жогорку тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү дифференциалдык теңдемелер.....	61
18.4.1. " n " — тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын тургузуу.....	61
18.4.2 Мүнөздүк теңдеме эселүү жана комплекстик тамырларга ээ болгон учурлар.....	66
1) Эселүү тамырлар учуру.....	66
2) Мүнөздүк теңдеменин тамыры $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекстик сан болгон учур.....	69
Мисалдар	70

7. КӨНҮГҮҮЛӨР	73
§ 18.5 Жогорку тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелер. Турактууну вариациялоо ыкмасы	74
18.5.1 n – тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышын түзүлүшү	74
18.5.2 Турактууну вариациялоо ыкмасы	78
Мисалдар	81
§18.6 Оң жагы көп мүчө болгон бир тектүү эмес турактуу коэффициенттүү жогорку тартиптеги сызыктуу теңдемелер	84
18.6.1 Оң жагы $Fm(x)$ көрүнүштөгү көп мүчө болгон учур.....	84
18.6.2 Оң жагы квази көп мүчө болгон учур	87
Мисалдар	89
18.6.3 Оң жагы айрым көрүнүштөгү комплекстик функция болгон учур	92
18.6.4 Оң жагы $e axPmxcos\beta x$ көрүнүштө болгон учур	94
Мисалдар	96
Мисалдар	102
§ 18.7 Дифференциалдык теңдемелерди интегралдоодо даражалуу жана жалпыланган катарларды колдонуу.....	104
8. КӨНҮГҮҮЛӨР	108
§18.8 Дифференциалдык теңдемелер системасы	110
18.8.1 Дифференциалдык теңдемелер системасы жөнүндө түшүнүк	110
18.8.2 Мааниси матрица болгон функциялар.....	113
18.8.3 Биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасы	115
Мисалдар	116
18.8.4 Сызыктуу көз карандысыздык жана бир тектүү системанын жалпы чыгарылышынын түзүлүшү	118
18.8.5 Бир тектүү теңдемелер системасы үчүн Кошинин маселеси	122
18.8.6 Бир тектүү эмес теңдемелер системасы үчүн Кошинин маселеси. Вариация ыкмасы	123
18.8.7 Турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу системаны Эйлердин ыкмасы менен чыгаруу	127
18.8.8 Өздүк маанилердин көрүнүштөрүнө жараша чыгарылыштарды жазуу	131
1. Өздүк маанилери ар түрдүү чыныгы сандар болгон учур	131
Мисал.	131
2. Өздүк мааниси комплекстүү сан болгон учур.....	133
3. Кайталануучу (эселүү) өздүк маанилер болгон учур.....	137
9. КӨНҮГҮҮЛӨР	139
I – МАСЕЛЕЛЕР	144

II – МАСЕЛЕЛЕР	147
XIX ГЛАВА. ФУРЬЕНИН ЖАНА ЛАПЛАСТЫН ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮЛӨРҮ	154
§ 19.1 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрү.....	154
19.1.1 Фурьенин интегралдык формуласы.....	154
19.1.2 Фурьенин интегралын комплекстик формасы.....	158
19.1.3 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрү.....	160
Мисалдар	162
19.1.4 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрүн касиеттери.....	166
§19.2 Лапластын өзгөртүп түзүүсү.....	174
19.2.1 Лапластын өзгөртүп түзүүсүн аныктамасы.....	174
Мисалдар	179
19.2.2 Лапластын өзгөртүп түзүүсүн негизги касиеттери	180
10. Сызыктуулук касиети.	180
20. Окшоштук.	182
30. $f(t)$ нан туунду алуу эрежеси.....	183
40. $F(p)$ нын туундусу.	185
50. Оригинал функциядан интеграл алуу эрежеси.....	187
60 Сүрөттөлүү функциясынан интеграл алуу.....	188
70. Кечикме касиети.	191
4. КӨНҮГҮҮЛӨР	193
80. Жылышуу касиети.	194
Мисалдар	194
§ 19.3 Капталган (Свертка) функциялар жана алардын Лаплас боюнча элестерин табуу	195
90. – Лапластын өзгөртүүсүн көбөйтүндүсү – Борелдин теоремасы.	196
Мисалдар	197
100. Параметр боюнча туунду.	198
§ 19.4 Айрым функциялардын элестерин жана оригиналдарын табуу усулдары.....	200
19.4.1 Мезгилдүү функциялардын Лаплас боюнча элестери.....	200
8. КӨНҮГҮҮЛӨР	201
19.4.2 Лапластын элеси боюнча оригинал функцияны табуу.....	202
§ 19.5 Лапластын өзгөртүүсүн колдонулуштары	210
19.5.1 Турактуу коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда Лапластын өзгөртүүлөрүн колдонуу	211
Мисалдар	212
19.5.2 Турактуу коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасын чыгарууда Лапластын өзгөртүүлөрүн колдонуу.....	218

Мисалдар	219
§ 19.6 Дюамелдин интегралы жана анын колдонулуштары	229
§ 19.7 Импульстук функциялар жана алардын Лаплас боюнча элестери	233
§ 19.8 Лапластын өзгөртүүсүн электротехникадагы айрым колдонулуштары	237
Мисалдар	240
Лапластын өзгөртүүсүн касиеттери.....	242
XX ГЛАВА. ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР	244
§ 20.1 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер теориясына киришүү	244
20.1.1 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү	244
1. Көнүгүүлөр	248
20.1.2 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу ыкмалары	249
§ 20.2 Бир өлчөмдүү параболалык теңдемелер.....	251
20.2.1 Сырттан таасир болбогон учурда жылуулук өткөрүмдүүлүктүн сызыктуу теңдемесин түзүү	251
Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси.....	253
Диффузиялык типтеги айрым теңдемелер	256
2. Көнүгүүлөр	258
20.2.2 Диффузиялык типтеги маселерге коюлуучу чек ара шарттары.....	259
3. Көнүгүүлөр	264
20.2.3 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин келтирип чыгаруу	265
20.2.4 Диффузиялык теңдемелерди өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен чыгаруу	269
20.2.5 Бир тектүү эмес теңдемелерди өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен чыгаруу	277
4. Көнүгүүлөр	281
20.2.6 Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн жекече туундуларды эсептөөгө жана капталган (свертка) функциялар теориясына колдонуу	282
1. Жекече туундулардын Фурье – элестери	284
2. Капталган (Свертка) функциялардын Фурье – элестери	285
20.2.7 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган Кошинин маселесин Фурьенин өзгөртүп түзүүсү менен чыгаруу	286
20.2.8 Жекече туундулардын жана капталган функциялардын Лаплас – элестерин табуу	291
20.2.9 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган аралаш маселени, Лапластын өзгөртүп түзүүсү менен чыгаруу	294
5. Көнүгүүлөр	297
§20.3 Бир өлчөмдүү гиперболалык теңдемелер.....	298
20.3.1 Кылдын термелүүсү.....	298
20.3.2 Даламбердин формуласы. Кубалашкан толкундар ыкмасы	301

Мисалдар	305
20.3.3 Даламбердин формуласын геометриялык жактан чечмелөө.....	307
6. Көнүгүүлөр	310
20.3.4 Толкундун теңдемелерине коюлуучу чек ара шарттары	310
20.3.5 Чектелген кылдын термелүү теңдемелерин Фурьенин ыкмасы менен чыгаруу	312
20.3.6 Учтары катырылган кылдын аргасыз термелүүсү	319
Мисал	323
20.3.7 Толкундун теңдемесине Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонуу ыкмасы	324
Мисал	326
20.3.8 Көп өлчөмдүү мейкиндиктердеги толкундун теңдемелери	327
20.3.9 Биринчи тартиптеги жекече тундулуу теңдемелер системасы	332
7. Көнүгүүлөр	336
§20.4 Эллиптикалык теңдемелер.....	339
20.4.1 Лапласиан жана анын физикалык мааниси	339
20.4.2 Чекте коюлган негизги чек ара шарттарынын үч түрү.....	342
20.4.3 Лапластын теңдемесине тегеректе коюлган Дрихленин ички маселесин чыгаруу	346
20.4.4 Пуассондун интегралдык формуласы.....	349
20.4.5 Алкакта коюлган Дрихленин маселеси	352
Мисалдар	355
20.4.6 Дрихленин сырткы маселеси	357
Мисалдар	358
20.4.7 Дрихленин бир тектүү эмес маселеси. Гриндин функциясын тургузуу.....	359
8. Көнүгүүлөр	366
§20.5 Сандык жана жакындаштырып эсептөө усулдары.....	368
20.5.1 Чектүү айырмалар менен аппроксимациялоо ыкмасы	368
20.5.2 Чектүү айырмалар ыкмасы менен Дрихленин маселесин чыгарууга мисал	370
20.5.3 Айкын айырмалар усулу менен жылуулук өткөрүмдүүлүк жана толкундун теңдемелерин чыгаруу	373

Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.

Галилей

XVIII ГЛАВА. КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР

§18.1 Дифференциалдык теңдемелер жөнүндө негизги түшүнүктөр

Жаратылыштын кубулуштарын окуп үйрөнүүдө жана аны турмушта колдонууда, жаратылыштын закондоруна таянабыз. Ал эми көзгө көрүнбөгөн, сезимде туюлбаган жаратылыш закондорун математикалык тилде гана адамча түшүнүүгө болот, б.а. алардын математикалык тилде жазылган теңдештиктер, теңдемелер, туюнтмалар катарында элес-моделдерин түзүүгө болот. Түзүлгөн моделдерди математикалык амал-эрежелер аркылуу изилдеп, алынган жооп-натыйжаларды, ошол закондордун түшүндүрмөсү катарында кабыл алып, жаңоо турмушта колдонобуз. Чынында эле физиканын, техниканын, химиянын, биологиянын, экономиканын жана башка көптөгөн тармактардын мыйзамдары, ошол тармактардын закондорунун негизинде түзүлүп, математикалык модел – теңдештиктер, теңдемелер аркылуу туюнтулуп жазылганына күбө болуп жүрөбүз.

Теңдемелерге белгисиз чоңдуктарына жараша ат коюлат:

1. **Алгебралык теңдемеде:** белгисиз чоңдуктар катары сандар катышат;
2. **Функционалдык теңдемеде:** белгисиздер функциялар болушат;
3. **Дифференциалдык теңдемеде:** белгисиздер функциялар, анын туундулары жана аргументтери болушат;
4. **Интегралдык теңдемеде:** белгисиздер интеграл алдындагы функциялар, алардын туундулары жана аргументтери болушат.

Дифференциалдык теңдемелер болсо, бир же бирден көп өзгөрүлмө чоңдуктарды, ал өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон белгисиз функцияны жана анын туундуларын кармап турушат. Эгерде белгисиз функция жана анын туундулары бир өзгөрүлмөлүү болсо, анда дифференциалдык теңдеме **кадимки дифференциалдык** теңдеме, ал эми белгисиз функция көп өзгөрүлмөлүү болсо, анда **жекече туундулуу дифференциалдык** теңдеме же **математикалык физиканын** теңдемеси деп аталышат. Бул главада кадимки дифференциалдык теңдемелер каралып, аларды чыгаруу усулдары көрсөтүлөт. Бирок, атайын эскертүү болбосо кадимки жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин экөөсүн тең эле дифференциалдык теңдемелер деп атап, практикалык зарылчылыкка жараша окуп үйрөнүп колдоно беребиз.

Эң жөнөкөй дифференциалдык теңдемеге мисал катары $y' = f(x)$ теңдештигин канааттандыруучу $y = y(x)$ функциясын табуу маселесин келтирүүгө болот. $f(x)$ белгилүү функция болгондо, берилген теңдеме

$$y = \int f(x) dx + C = \Phi(x) + C$$

көрүнүштөгү чыгарылышка ээ. Мында $\Phi(x)$ деп $f(x)$ функциясын алгачкы функциясы, ал эми C менен каалагандай турактуу сан белгиленген. Бул дифференциалдык теңдеменин бири – биринен C турактуусуна айырмаланган чексиз көп чыгарылыштарга ээ болорун көрөбүз.

Дифференциалдык теңдемедеги белгисиз функциянын туундусун **эң жогорку тартиби**, ал дифференциалдык теңдеменин **тартиби** деп аталат. Мисалы

$$y' - x \cdot y^{99} + y = 0 \quad \text{же} \quad F(x, y, y') = 0, \quad 1 - \text{тартиптеги};$$

$$y'' + \sin x y' + y = 0 \quad \text{же} \quad F(x, y, y', y'') = 0, \quad 2 - \text{тартиптеги};$$

$7y^V + y' + y - x^2 + 3 = 0$ же $F(x, y, y', y'', \dots, y^V) = 0$, 5 – тартиптеги дифференциалдык теңдемелер болушат.

Жалпы учурда x өзгөрүлмөсүнө карата $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ белгисиз функцияларын кармаган n – тартиптеги дифференциалдык теңдемени

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

$n + 2$ өзгөрүлмөлүү айкын эмес функция көрүнүштө берүүгө болот. (1) жазылышында теңдеменин тартибин көрсөткөн $y^{(n)}(x)$ туундусу сөзсүз катышат, калган тартиптеги туундулары катышпай калышы да мүмкүн. Мында $n = 1, 2, 3, \dots$.

Айрым учурда (1) ди жогорку n – тартиптеги туундусуна карата чыгарылган

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1^A)$$

көрүнүшкө келтирип жазышат.

(1) теңдемесин кайсы бир жекече учуру катарында эсептелген n – тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемени, жалпы учурда

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x) \quad (2)$$

көрүнүштө жазабыз.

Мында $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x), f(x)$ белгилүү функциялар жана $a_n(x)$ функциясы аныкталуу областында нөлгө барабар эмес, анткени ал туундунун тартибин көрсөткөн $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ ке коэффициент болуп турат ($a_n(x) = 0$ болсо, анда теңдеме n – тартипте болбой калат). Ошондой эле $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ функциялары (2) **дифференциалдык теңдеменин коэффициенттери**, ал эми $f(x)$ функциясы **бош мүчөсү** деп аталышат.

Эгерде теңдемеде $y(x), y', y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ белгисиз функцияларын бирөөсү же бир канчасы, башка бир функциянын суперпозициясы катары катышса, анда аны **сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме** дейбиз.

Эгерде аныкталуу областын бардык чекиттеринде $f(x) \equiv 0$ нөлгө барабар болсо ($f(x)$ – нөлдүк функция болсо), анда (2) теңдемеси n – тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемеге айланат.

Мисалы,

$$a) \frac{dx}{dt} = x^3 + t^6 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} - x^3 = t^6 \text{ теңдемеси, } x(t) \text{ – белгисиз}$$

функциясына карата биринчи тартиптеги бир тектүү эмес жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот. Анткени $x(t)$ – белгисиз функциясы үчүнчү даражада катышып, башка бир $x = u$, $u = x^3$ функциянын суперпозициясы (татаал функция) катарында катышууда.

$$б) \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = x^4 + 5x$$

$y(x)$ – белгисиз функциясын, анын биринчи туундусу $y'(x)$ ти жана экинчи туундусу $y''(x)$ ти кармаган, экинчи тартиптеги бош мүчөсү $f(x) = x^4 + 5x$ болгон бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот.

$$в) x^4 y''' + (y')^3 + y^2 = x^7$$

дифференциалдык теңдемеси үчүнчү тартиптеги бир тектүү эмес жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот. Анткени белгисиз $y(x)$ функциясы экинчи даража, y' - туундусу үчүнчү даража көрсөткүчтөрү менен катышып, көрсөткүчтүү татаал функциянын аргументтери катарында эсептелүүдө.

$$г) y^{(IV)} = \ln(x y''') + \ln(x^2 y'') + y^3$$

теңдемеси жогорку туундусуна карата чыгарылган 4 – тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме болот.

$$д) (x^2 + 1) y''' + (\ln x) y'' + (\cos x) y' + y = e^x$$

теңдемеси 3 – тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот. Себеби бул теңдеме (2) теңдеменин $n = 3$,

$a_3(x) = x^2 + 1$, $a_2(x) = \ln x$, $a_1(x) = \cos x$, $a_0(x) = 1$, $f(x) = e^x$ болгондогу айрым бир учуру.

$$e) (1 + x^4) y'' + (\cos x) y' + (\arcsin x) y = 0$$

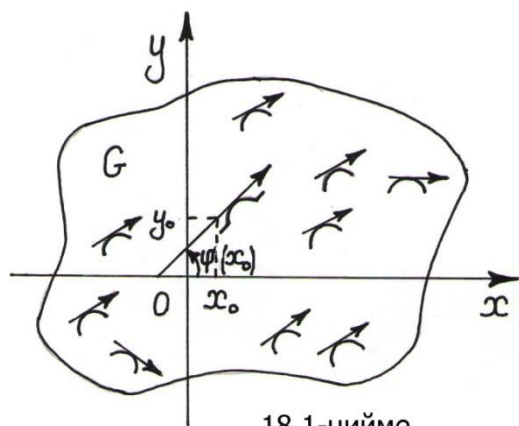
теңдемеси 2 – тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот. Себеби бул теңдеме (2) теңдеменин $n = 2$,

$a_2(x) = 1 + x^4$, $a_1(x) = \cos x$. $a_0(x) = \arcsin x$, $f(x) = 0$ болгондогу бир айрым учуру.

Эгерде (1) теңдемесине $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$, ... , $y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ маанилерин койгондо (1) теңдеиштиги аткарылса, б.а. теңдемени канааттандырса, анда $y = \varphi(x)$ функциясы (1) теңдемесин чыгарылышы деп аталат.

Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын (чечимин) табуу маселеси теңдемени **интегралдоо маселеси** деп аталат. Ал эми дифференциалдык теңдеменин $y = \varphi(x)$ чыгарылышынын графиги, дифференциалдык теңдеменин **интегралдык ийриси** деп аталат.

Дифференциалдык теңдеменин чексиз көп интегралдык ийрилери бар. Мисал катары 1 – тартиптеги $F(x, y, y') = 0$ теңдемесин $y = \varphi(x)$ чечимине геометриялык түшүндүрмө берели. Теңдемени y' ке карата чыгарып, $y' = f(x, y)$ көрүнүштө жазуу мүмкүн болсун дейли. Эгерде $f(x, y)$ функциясы координаттык тегиздиктеги G областында аныкталса, анда теңдеме койгон шартка ылайык G областын каалагандай $(x_0; y_0)$ координаталуу чекитинде $y = \varphi(x)$ функциясын графигине



18.1-чийме

жүргүзүлгөн жаныма түздүн бурчтук коэффициенти $k = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ болушу керек. Ал эми $(x_0; y_0)$ чекити деп G областынан ар кандай чекиттерди ала берсек, анда G областы ар кандай $k = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ бурчтук коэффициенттери менен багыттары аныкталган жанымалалардын чексиз көп агымы менен толтурулган болот. Мындай

агым дифференциалдык теңдеменин **багыттарын талаасы** деп аталат (18.1 – чийме). Механикалык жактан $y' = f(x, y)$ теңдемесин $y = \varphi(x)$ чечимин, G областын каалагандай $(x_0; y_0)$ координаталуу чекитинде

$v = f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ ылдамдыгына ээ болгон кубулушту сүрөттөөчү функция деп түшүнөбүз.

Мисалы: 1) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

функциясы $y'' + y = 0$ теңдемесине чыгарылыш болорун көрсөткүлө.

► Берилген $y(x)$ функциясынан эки жолу туунду алып, табылган

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

маанилерди теңдемеге койгондо

$$y'' + y = (-C_1 \cos x - C_2 \sin x) + (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = 0,$$

сол жагы да нөлгө тең болуп, теңдештик аткарылат. Демек, берилген функция дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болот. ◀

Ошентип, берилген дифференциалдык теңдеменин мүмкүн болгон бардык чыгарылыштары

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x = \varphi(x, C_1, C_2)$$

көрүнүштө болуп, алар C_1 жана C_2 эки турактуу сандарына берилген маанилерге жараша өзгөрүп туруучу бир өзгөрүлмөлүү функция болот. Турактуулардын ар кандай маанилерине жараша дифференциалдык теңдеменин чексиз көп жекече чыгарылыштарын табууга болот. Ал эми $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ теңдеменин **жалпы чыгарылышы** деп аталат.

Ушул логиканы улап, n – тартиптеги (1) теңдемесинин мүмкүн болгон бардык чыгарылыштарын кармап турган **жалпы чыгарылышын**, n сандагы ар кандай C_1, C_2, \dots, C_n турактуу сандарынан көз каранды болгон

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3)$$

функциясы көрүнүштө болот деген жыйынтыкка келебиз. Мында

$\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ деп, $n + 1$ өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон белгилүү функцияны түшүнөбүз.

Эгерде (1) теңдеменин (3) чыгарылышындагы C_1, C_2, \dots, C_n турактууларына белгилүү бир сандык маанилерди берсек, анда ал чыгарылыш (1) теңдемесин жекече чыгарылышы (чечими) деп аталат.

Мисалдагы теңдеменин $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ жалпы чыгарылышында $C_1 = 0$ жана $C_2 = 1$ болсо,

анда $y = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$ функциясы, ал эми $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -1$ болсо, анда $y = \frac{1}{2} \cos x - \sin x$ функциясы теңдеменин жекече чыгарылыштары болушат.

18.1.1 Кошинин маселеси

Мисалдардан көрүнгөндөй, кайсы бир конкреттүү кубулуштун математикалык модели болуп эсептелген дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышы чексиз көп маанилүү болуп, алардын арасынан кайсынысы биз изилдеген кубулушту үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк түзөрү белгисиз калууда. Ошондуктан (1) дифференциалдык теңдемесин чыгаруудан мурда, анын чечимине конкреттүү кубулушка тиешелүү шарттар коюлат. Мындай шарттардын бири **баштапкы шарт** деп аталып, (1) теңдемесин изделүүчү $y(x)$ чечимине

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (4)$$

көрүнүштө коюлат. Мында $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ - кубулушка байланышкан белгилүү сандар болушуп, (3) жалпы чечиминде ар кандай деп эсептелген C_i – турактуу сандарын ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) конкреттүү бир маанилеринде, ошол кубулушту сүрөттөөчү бир гана жекече чечимди табууга мүмкүнчүлүк түзөт.

Берилген (1) дифференциалдык теңдеменин (4) баштапкы шартты канааттандырган чыгарылышын табуу маселеси, **Кошинин маселеси** деп аталат.

$n = 1$ болгон учурда Кошинин маселесинин чыгарылышын жалгыздыгы жөнүндөгү теореманын маани – маңызын түшүндүрөлү.

18.1 Теорема (жалгыз гана чыгарылыштын жашашы).

Айталы,

$$y' = f(x, y) \quad (*)$$

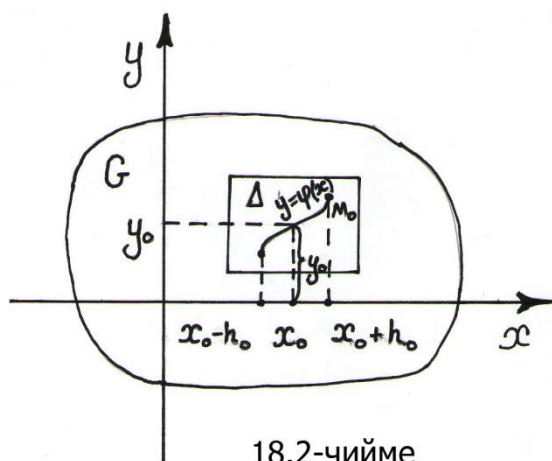
дифференциалдык теңдемеси берилип, $f(x, y)$ функциясы xOy координаттык тегиздиктин G областында аныкталсын. G областынан эркин жайгашкан $M_0(x_0; y_0)$ чекитин алалы. Эгерде M_0 чекитинин жакынкы Δ – чеке белинде $f(x, y)$ функциясы:

1) Эки аргументи боюнча тең үзгүлтүксүз болсо;

2) Чектелген $\frac{\partial f}{\partial x}$ – жекече туундусу жашаса,

анда Ox огуна $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ интервалы табылып, ушул интервалда $(*)$ теңдеменин $y_0 = \varphi(x_0)$ баштапкы шартына баш ийген жалгыз гана $y = \varphi(x)$ чыгарылышы жашайт.

Теореманы геометриялык жактан G областын Δ – аймакчасында жайгашкан $M_0(x_0; y_0)$ чекити аркылуу, $(*)$ теңдеменин жалгыз гана интегралдык ийриси (чыгарылышы) өтөт деп түшүнөбүз (18.2 – чийме).



Бул учурда $(*)$ теңдемесин $y = \varphi(x, C)$ жалпы чечимдерин тобуна, M_0 чекитин кандайдыр бир Δ – аймакчасында, x өзгөрүлмөсүнөн жана конкреттүү бир C_0 турактуусунан (параметринен) көз каранды болгон $y = \varphi(x, C_0)$ жекече чыгарылыш катары бөлүнүп алынат жана ал баштапкы $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ шартын

канааттандырат. Ошентип жалпы чыгарылыш бардык жекече чыгарылыштардын көптүгү катары каралат.

Бирок, айрым учурларда $M_0(x_0; y_0)$ чекитинен жалгыз гана чыгарылыштын өтүү шарты бузулуп, бир канча кээде чексиз көп $y = \psi(x)$ – чечимдер өтүп калышы да мүмкүн. Мындай чыгарылыштарды $y = \psi(x)$ – **өзгөчө чыгарылыш же чечим** деп айтышат.

Ал эми (*) теңдемесин Кошинин баштапкы шарты менен кошо

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = \varphi(x_0, C_0) = y_0 \end{cases}$$

көрүнүштө жазабыз.

Теореманын кортундусу локалдык мүнөзгө ээ болуп, M_0 чекитин кичинекей аймакчасында гана жалгыз чыгарылыштын табылышына кепилдик берет. Бирок, аймакчанын сыртында жайгашкан чексиз көп чекиттер аркылуу өтүүчү чексиз көп чыгарылыштар жашай бериши мүмкүн.

Кошинин маселесине мисалдар

2) $y' = x + y$ теңдемесинде $f(x, y) = x + y$ бүтүндөй xOy координаттык тегиздигинде теореманын шарттарына баш ийет жана $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$. Ошондуктан тегиздиктин каалагандай $M_0(x_0; y_0)$ чекити аркылуу өтүүчү бир гана интегралдык ийри (чечими) жашайт. ◀

$$3) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2xy \text{ теңдемесин,} \\ y(0) = 7 \text{ баштапкы шартын} \end{cases}$$

канааттандырган чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы $y(x) = Ce^{x^2}$ көрүнүштөгү функция болорун текшерип көрөлү:

$$\text{Сол жагы } \frac{dy}{dx} = C(e^{x^2})' = Ce^{x^2} (x^2)' = 2x(Ce^{x^2}) = 2xy \equiv 2xy \text{ — оң жагы}$$

Демек, жалпы чыгарылыш $y(x) = Ce^{x^2}$ көрүнүштө болот.

Дифференциалдык теңдеме үчүн коюлган баштапкы $y(0) = 7$ шартын эске алсак,

$y(0) = 7 \Leftrightarrow C \cdot e^{0^2} = 7 \Leftrightarrow C = 7$ болору келип чыгат. Анда Кошинин баштапкы шартын канааттандырган жекече чыгарылышы

$y(x) = 7 \cdot e^{x^2}$ көрүнүштө табылат.

4) Төмөнкү Кошинин маселесин чыгаргыла:

$$\begin{cases} y'' = 2x, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

► $y'' = \frac{dy'}{dx}$ болгондуктан, берилген теңдемеден төмөнкүнү алабыз:

$$d y' = 2x dx.$$

Бул барабардыктын эки жагын интегралдасак

$$\frac{dy'}{dx} = x^2 + C_1$$

Мында C_1 – турактуу сан. Акыркы теңдемеден

$$d y = (x^2 + C_1) dx$$

экендигин алабыз. Бул барабардыкты дагы бир жолу интегралдасак

$$y(x) = \int (x^2 + C_1) dx + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2,$$

мында C_1 жана C_2 - турактуу сандар. Демек, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

функциясы болот. Бул жалпы чыгарылыштан баштапкы шартты канааттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0^3}{3} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1, \\ 0^2 + C_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = 3 \end{cases}.$$

Мындан, берилген Кошинин маселеси

коэффициенттерин k_1 жана k_2 менен белгилейли. Убакытка карата, ал региондогу калктын санын өзгөрүү законун тапкыла.

► Убакыттын t моментиндеги региондогу калктын санын $y = y(t)$ менен белгилейли. Анда Δt убакыт аралыгындагы калктын өсүүсү Δy , ал убакыт аралыгындагы жаңы туулгандардын саны менен өлгөндөрдүн санынын айырмасына барабар, б.а.

$$\Delta y = k_1 \cdot y \cdot \Delta t - k_2 \cdot y \cdot \Delta t$$

мындан

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = (k_1 - k_2) y.$$

Акыркы формуладан $\Delta t \rightarrow 0$ пределине өтүп

$$y' = (k_1 - k_2) y,$$

дифференциалдык теңдемесин алабыз. Бул теңдеме

$$y(t) = c e^{(k_1 - k_2)t}$$

чыгарылышына ээ болот. Мында c - турактуу саны убакыттын баштапкы мезгилиндеги белгилүү болгон калктын санынан аныкталат. ◀

7) Радиоактивдүү ажыралыш. Эгерде $m(t)$ аркылуу t убакытысындагы радиоактивдүү заттын массасын белгилесек, анда радиоактивдүү ажыралуу төмөндөгүдөй физикалык законго баш ийет. Ажыралыштын ылдамдыгы терс (себеби убакыт өткөн сайын масса кемийт) жана убакыттын t ирмеиндеги заттын массасына пропорциялаш. Мында пропорция коэффициенти k белгилүү жана $k < 0$. Бул закон математикалык тилде төмөндөгүдөй жазылат:

$$\frac{dm(t)}{dt} = k m(t), \quad k < 0.$$

Радиоактивдүү ажыралуунун математикалык модели болгон бул теңдеменин жалпы чыгарылышы $m(t) = C e^{kt}$ формуласы менен берилет, мында C – эркин турактуу. Ажыралыш законун толук аныктоо үчүн баштапкы убакыттагы заттын массасы белгилүү болушу керек, б.а.

$$m(t_0) = m_0.$$

8) x – аргументи $x > 0$ болгондо

$$y(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \ln x$$

функциясы,

$$4x^2 y'' + y = 0$$

теңдемесине чыгарылыш болорун текшергиле.

► Берилген функцияны эки жолу дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз:

$$y'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x,$$

$$y''(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \ln x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Эми берилген функцияны жана анын экинчи туундусун берилген теңдемеге коёбуз:

$$4x^2 y'' + y = 4x^2 \left(\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \ln x - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0.$$

Демек, берилген функция чынында эле чыгарылыш болот. ◀

1. КӨНҮГҮҮЛӨР

1. Төмөндөгү жазылган дифференциалдык теңдемелердин тартибин көрсөткүлө жана сызыктуу же сызыктуу эмес экендигин аныктагыла.

1) $y' = x^2 + y^2$;

2) $y^{(IV)} + y = 1$;

3) $2xy' + y^2 = 1$;

4) $(y')^3 - y'e^{2x} = 0$;

5) $(y''')^2 - 3x^2 y'' + y^5 = 10$;

6) $x^2 y'' = (y')^2$,

7) $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = e^x$

8) $y y'' + 3 y' y'' = 0$;

9) $y^{(IV)} + 6 y'' + 4y = \cos x$;

10) $y'' + \tan(x y') + \ln x = 0$.

2. Төмөндөгү берилген $y = f(x)$ функциясы, тийиштүү дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы болорун көрсөткүлө:

1) $y = x^2 + C$; $y' = 2x$, C – турактуу сан;

2) $y = C e^{-3x}$; $y' = -3y$;

3) $y = C_1 x^2 + C_2$; $x y'' - y' = 0$, C_1, C_2 – турактуу сандар;

4) $y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$; $y' + \frac{1}{x}y = 1$;

5) $y = e^{-x} + C e^{-\frac{3}{2}x}$; $x y' + 3y = e^{-x}$;

6) $y = \tan x$; $y y'' = 2(y')^2 - 2y'$;

7) $y = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$; $x^2 y' + xy = e^x$;

8) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$; $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$;

9) $y^2 - 2 = C e^{\frac{1}{x}}$, $2x^2 y y' + y^2 = 2$

3. Төмөндөгү берилген $y = f(x)$ функциясы, тийиштүү Кошинин маселесинин чыгарылышы болорун көрсөткүлө:

1) $y = 160x - 16x^2$; $y'' = -32$, $y(5) = 100$, $y'(5) = 0$;

2) $y = 2(1 - e^{-\frac{3x}{2}})$, $2y' + 3y = 6$; $y(0) = 0$,

3) $y = 3\cos 2x - \sin 2x$; $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -2$;

4) $y = 2 - \ln \cos(x - 1)$; $y'' - (y')^2 = 1$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$

4. Төмөндөгү берилген $y = f(x)$ функциясы, тийиштүү дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы болорун көргөзгүлө жана $y = f(x)$ функциясы

үчүн тийиштүү баштапкы шарт аткарыла турган C – турактуу санын тапкыла.

- 1) $y = C e^{-x}$; $y' + y = 0$, $y(0) = 2$,
- 2) $y = C e^{2x}$; $y' = 2y$; $y(0) = 3$,
- 3) $y = C e^x - 1$; $y' = y + 1$; $y(0) = 5$,
- 4) $y = C e^{-x} + x - 1$; $y' = x - y$, $y(0) = 10$;
- 5) $y = C e^{-x^3}$, $y' + 3x^2 y = 0$, $y(0) = 7$;
- 6) $y = \ln(x + C)$; $e^y y' = 1$; $y(0) = 0$;
- 7) $y = \frac{1}{4}x^5 + Cx^{-3}$, $xy' + 3y = 2x^5$; $y(2) = 1$;
- 8) $y = x^3 (C + \ln x)$, $xy' - 3y = x^3$; $y(1) = 17$;
- 9) $y = \tan(x^3 + C)$, $y' = 3x^2(y^2 + 1)$; $y(0) = 1$,
- 10) $y = (x + C)\cos x$; $y' + y \tan x = \cos x$; $y(\pi) = 0$

§ 18.2 Биринчи тартиптеги квадратуралануучу (таблицалык интегралга келүүчү) дифференциалдык теңдемелер

18.2.1 Өзгөрүлмөлөрү ажыралма дифференциалдык теңдемелер

Айталы, $F(x, y, y') = 0$ көрүнүштө берилген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени, кандайдыр бир алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)} \Leftrightarrow y' = \frac{M(x)}{N(y)} \Leftrightarrow M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5)$$

көрүнүштөрдүн бирине келтирүүгө мүмкүн болсун дейли. (5) теңдемелерде $M(x)$ бир гана x өзгөрүлмөсүнөн, ал эми $N(y)$ бир гана y өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон функциялар экендигин көрөбүз.

Мындай теңдемелер **өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган дифференциалдык теңдемелер деп аталышат.**

(5) теңдемелерин баары тең күчтүү жана бири – биринен жеңил келтирилип чыгарылгандыктан, алардын акыркы жазылышын карап, анын эки жагын тең dx ке көбөйтүп, ага эквиваленттүү болгон төмөнкү дифференциалдык

$$M(x)dx + N(y) dy = 0 \quad (6)$$

форманы алабыз.

(6) нын эки жагынын тең анык эмес интегралдарын

$$\int M(x)dx + \int N(y) dy = C \quad (7)$$

эсептеп, берилген теңдеменин чечимин айкын эмес функция көрүнүштө жазабыз. Мында C – каалагандай турактуу сан. Эгерде (7) айкын эмес функциядан y ти x аркылуу туюнта алсак, анда (6) теңдеменин чечимин айкын функция түрүндө жазууга болот.

Ошондой эле,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \text{ жана } a(x)b(y)dx + p(x)q(y)dy = 0$$

теңдемелери да өзгөрүлмөлөрү ажыралма дифференциалдык теңдемелер болушат. Себеби биринчисин эки жагын тең $\frac{dx}{g(y)}$ ке көбөйтүп, ал эми экинчисин эки жагын $\frac{1}{b(y)p(x)}$ ке көбөйтүп, (5) көрүнүштөгү теңдемелердин бирине келебиз.

$$1) \frac{dy}{dx} = (1 + y^2)e^x \text{ теңдемесин чыгаргыла.}$$

► Берилген теңдемени (6) көрүнүштө жазуу үчүн, анын эки жагын $\frac{dx}{1 + y^2}$ ке көбөйтүп

$$e^x dx - \frac{1}{1 + y^2} dy = C,$$

түрүнө келтиребиз. Акыркыны интегралдап

$$\int e^x dx - \int \frac{1}{1+y^2} dy = C \quad \Leftrightarrow \quad e^x - \operatorname{arctg} y = C \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{arctg} y = e^x - C \quad \Leftrightarrow \quad y = \operatorname{tg}(e^x - C),$$

берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз ($C - \text{const.}$). ◀

2) Төмөндөгү

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \quad y(0) = 7$$

Кошинин маселесин чыгарылышын тапкыла.

► Теңдеменин эки жагын тең $\frac{dx}{y}$ ке көбөйтүп

$$\frac{dy}{y} = -6x dx$$

теңдемесин алып, андан кийин интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-6x) dx,$$

$$\ln |y| = -3x^2 + C \quad (C - \text{турактуу сан}).$$

Баштапкы шарттын негизинде $y(0) = 7$ болгондуктан, $x = 0$ санынын чеке белинде $y(x)$ функция оң (логарифми жашайт). Демек

$$\ln y = -3x^2 + C,$$

$$y = e^{-3x^2 + C} = e^C e^{-3x^2} = A e^{-3x^2}.$$

Мында $A = e^C$. Баштапкы шарттан $y(0) = A e^{-3 \cdot 0^2} = A \cdot 1 = 7 \Leftrightarrow A = 7$ жана Кошинин маселесинин чыгарылышы

$$y(x) = 7 e^{-3x^2}$$

функциясы болот. ◀

2. КӨНҮГҮҮЛӨР

5. Төмөндөгү теңдемелерди чыгаргыла:

1) $\sqrt{y^2+1} dx = xy dy, (\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C);$

2) $xy' - (1+x)y = 0, (y = Cx e^x);$

3) $y' = 2^{x+y}; (y = -\log_2(C - 2^x))$

4) $xy' + y = y^2;$

5) $y' = e^{x-y}; (y = \ln(e^x + C));$

6) $xy' = \sqrt{y};$

7) $(1-x)dy - ydx = 0;$

8) $xy' - y = y^3; (x = \frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}})$

9) $y - xy' = 1 + x^2 y'; (y = 1 + \frac{Cx}{1+x});$

10) $xyy' = 1 - x^2; (x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)).$

6. Кошинин маселесинин чыгарылышын тапкыла:

1) $xydx + (x+1)dy = 0, y(0) = 3;$

$(y = 3(x+1)e^{-x});$

2) $\sqrt{y^2+1} dx = xy dy; y(1) = 0; (\ln|x| = \sqrt{y^2+1} - 1);$

3) $2x^2y y' + y^2 = 2; y(1) = e;$

$(y^2 - 2 = (1 - 2e^{-1})e^{1/x}),$

4) $yy' + x = 1; y(-1) = 1;$

$(x^2 + y^2 - 2x = 4);$

5) $y' = 10^{x+y}; y(0) = -1;$

$(y = -\lg(11 - 10^x)).$

18.2.2 Бирдей тектүү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер

Биринчи тартиптеги $F(x, y, y') = 0$ дифференциалдык теңдемесин

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8)$$

көрүнүштө теңдеш өзгөртүп жазуу мүмкүн болсо, анда аны *бирдей тектүү дифференциалдык теңдеме* деп атайбыз.

Мында $g = g(z)$ – бир аргументтен көз каранды болгон белгилүү функция $\left(z = \frac{y}{x}\right)$.

Мисалы. $y' = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ бирдей тектүү дифференциалдык теңдеме.

Бирдей тектүү дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү бирдей тектүү функциялар менен байланышкан.

18.1 Аныктама. $z = f(x, y)$ функциясы каалагандай $\forall t \in R$ саны үчүн $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$, ($k \geq 0$) шартын канааттандырса, анда ал k – чы даражадагы бирдей тектүү функция деп аталат.

3) Төмөнкү функциялар бирдей тектүү функция болобу?

а) $f(x, y) = 2x^2 + xy$;

б) $f(x, y) = \frac{4x - 3y}{x + y}$;

в) $f(x, y) = xy + 3$

► Каалагандай t саны үчүн:

а) $f(tx, ty) = 2(tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(2x^2 + xy) = t^2 f(x, y)$, демек берилген функция 2 – даражадагы бирдей тектүү функция болот.

б) $f(tx, ty) = \frac{4(tx) - 3(ty)}{tx + ty} = \frac{4x - 3y}{x + y} = t^0 \cdot f(x, y) = f(x, y)$, демек берилген

функция нөлүнчү даражадагы бирдей тектүү функция болот.

в) $f(tx, ty) = t^2 xy + 1 \neq t^k f(x, y) = t^k (xy + 1)$ болгондуктан

$f(x, y) = xy + 1$ функциясы бирдей тектүү болбогон функция. ◀

Эгерде $f(x, y)$ нөлүнчү даражадагы бирдей тектүү функция болсо, анда y' ке карата чыгарылган

$$y' = f(x, y) \quad (9)$$

теңдемеси бирдей тектүү дифференциалдык теңдеме болот.

Чынында эле, $t = \frac{1}{x}$ деп алганда

$$f(tx, ty) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}, x \cdot \frac{y}{x}\right) = t^0 \cdot f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

акыркыны $g\left(\frac{y}{x}\right)$ аркылуу белгилесек, анда (9) теңдемеси (8) көрүнүштөгү теңдемеге келет.

Эгерде $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ – бөлчөгүн алымы менен бөлүмү окшош n – даражалуу бирдей тектүү функциялар болушса, анда аларды бир гана $z = \frac{y}{x}$ тен көз каранды болгон функциялар катарында жазууга болот. Чынында эле, $t = \frac{1}{x}$ деп алсак, анда

$$M(t \cdot x, t \cdot y) = t^n M(x, y) \Leftrightarrow M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^{-n} M(x, y) \text{ жана}$$

$$N(t \cdot x, t \cdot y) = t^n N(x, y) \Leftrightarrow N\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^{-n} N(x, y) \text{ болгондуктан,}$$

$$\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{x^n \cdot M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^n \cdot N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = \frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ келип чыгат.}$$

Демек, $M(x, y)$ жана $N(x, y)$ функциялары n – даражадагы бирдей тектүү функциялар болсо, анда

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (10)$$

бирдей тектүү дифференциалдык теңдеме болот. Себеби (10) теңдемесин

$$y' = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)} \equiv f(x,y)$$

көрүнүшкө келтирсек, анда $f(x,y) = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$ - функциясы нөлүнчү даражадагы бирдей тектүү функция болуп, ал (9) көрүнүштө жазылат.

Бирдей тектүү теңдемени чыгаруу үчүн $z = \frac{y}{x}$ болгон жаңы z өзгөрүлмөсүн киргизебиз. Мындан $y = zx$ жана $y' = z'x + z$ туюнтууларын жүргүзүп, (8) теңдемесине койсок

$$z'x + z = g(z)$$

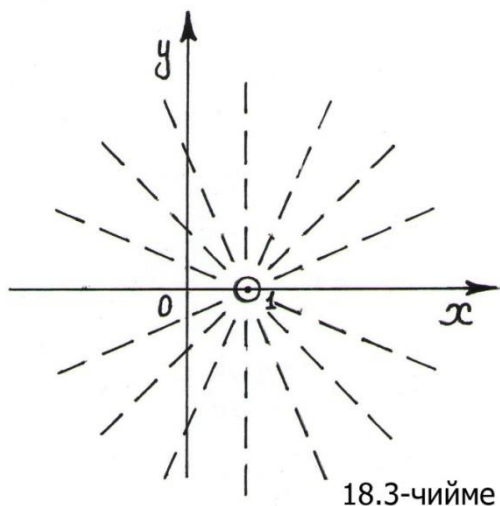
келип чыгат. Аны өзгөрүлмөлөрү боюнча топтоштуруп, x , z өзгөрүлмөлөрүнө карата ажыратылган

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad (11)$$

дифференциалдык теңдемесин алабыз. Аны (7) сыяктуу интегралдап, чечимин табууга болот.

Мисалдар

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1}$ теңдемесин интегралдык ийрисин таап, анын багыттарын



18.3-чийме

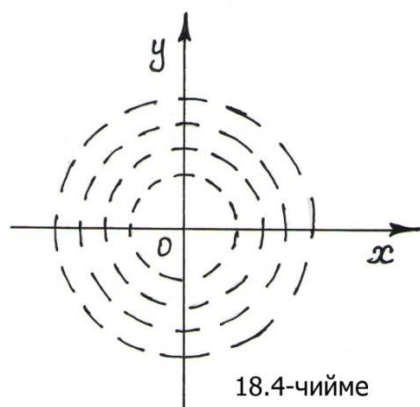
талаасын көрсөткүлө.

► $f(x,y) = \frac{y}{x-1}$ функциясын аныкталуу областы координаттык тегиздиктин $x = 1$ чекитинен башка бардык чекиттер болушат.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{|y|} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln y = \ln|x-1| + \ln|C| \Rightarrow$ теңдеменин чечимдери же интегралдык ийрилери тобу $x = 1$ түзүнөн башка $y = C \cdot (x-1) = C \cdot x - C$ түздөрү болушат. Мында C – каалагандай турактуу. Теңдеменин багыттарын талаасы, координаттык тегиздиктин $x = 1$ чекитинен башка бардык чекиттерде берилип (18.3 – чийме), $x = 1$ чекитинен чыккан

шоолалардын агымын түзөт (бул чекиттин өзү шоолаларга таандык эмес). ◀ 5) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ теңдемесин



багыттарын талаасы координата башталмасынан башка бардык чекиттерде берилип, 18.4 – чиймеде көрсөтүлгөн абалда жайгашат. Интегралдык ийрилердин тобун аныктайлы:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy + xdx = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int ydy + \int xdx = C \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C$ же $x^2 + y^2 = C^2$. Мында C каалагандай турактуу сан болгондуктан, аны C , $2C$, C^2 деп ала берүүгө укугубуз бар, анткени алардын үчөө тең каалагандай сан бойдон кала беришет. Демек, интегралдык ийрилердин тобу борбору координата башталмасы, радиусу $R = C$ болгон концентрикалык айланалар болушат.

б) $y' = \frac{x+2y}{x}$ теңдемесин чыгаргыла.

▶ $\frac{x+2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$ болгондуктан, берилген теңдеме үчүн

$g\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + 2\frac{y}{x}$. Эгерде $z = \frac{y}{x}$ деп белгилесек, анда

$g(z) - z = 1 + 2z - z = 1 + z$ келип чыгып, теңдеме

$$\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}$$

көрүнүштө жазылат. Аны интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x},$$

$\ln|1+z| = \ln|x| + C$, (C - турактуу сан) мындан

$|I+z| = e^C |x|$ же $I+z = C_1 x$ мында $C_1 = \pm e^C$. Демек $1 + \frac{y}{x} = C_1 x$ же теңдеменин чечими $y = (C_1 x - 1)x$ функциясы болот, C_1 – каалагандай турактуу сан. ◀

3. КӨНҮГҮҮЛӨР

7. Теги бирдей теңдемени чыгаргыла.

- 1) $y' = \frac{y}{x} - 1$, $(y = x \ln \frac{C}{x})$
- 2) $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$; $(x = Ce^{x/y}; y = 0)$;
- 3) $(x^2 + y^2) dx - 2xydy = 0$; $((x - C)^2 - y^2 = C^2)$;
- 4) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$, $(\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C, y = 0)$;
- 5) $ydy + (x - 2y)dx = 0$, $(x = (y - x)\ln(C(y - x)), y = x)$;
- 6) $y = x (y' - \sqrt{x} e^y) C$;
- 7) $y'(xy - y^2) = y^2$;
- 8) $y' = e^{x/y} - 1$;
- 9) $ydx + (x - y)dy = 0$.

8. Кошинин маселесин чыгаргыла:

- 1) $y' = y e^x$, $y(0) = 2e$; $(y = 2e^{e^x})$;
- 2) $y' = 3x^2(y^2 + 1)$ $y(0) = 1$;
- 3) $2yy' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$, $y(5) = 2$; $(y^2 = 1 + \sqrt{x^2 - 16})$
- 4) $y' = 4x^3 y - y$; $y(1) = -3$;
- 5) $y' + 1 = 2y$; $y(1) = 1$; $(\ln |2y - 1| = 2(x - 1))$.

18.2.3 Толук дифференциалдуу дифференциалдык теңдемелер. Интегралдоочу көбөйтүүчү

Көпчүлүк учурда биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин $y(x)$ – чечими

$$F(x, y(x)) = C \quad (12)$$

айкын эмес функция көрүнүштөгү теңдеме катарында берилет.

Чынында эле (12) теңдемесинен x аргументи боюнча туунду алсак, анда

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$M(x, y) = F_x(x, y)$ жана $N(x, y) = F_y(x, y)$ белгилөөлөрүн киргизип, (12) теңдемеден

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ же}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (13)$$

көрүнүштөгү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме келип чыгат.

Мындан (12) нин же $F(x, y) = C$ функциясын (13) теңдемесине жалпы чыгарылыш болору келип чыгат.

Ошентип, эгерде (13) дифференциалдык теңдемеси кайсы бир $F(x, y)$ функциясын

$$dF = F_x dx + F_y dy \equiv M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

толук дифференциалы болсо, анда анын жалпы чечими (12) көрүнүштө жазылат.

18.2 Аныктама. Эгерде (13) теңдемесин сол жагы кандайдыр бир $F(x, y)$ функциясын толук дифференциалы болсо, б.а.

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

теңдештиги орун алса, анда (13) теңдемеси толук дифференциалдуу теңдеме деп аталат.

Эми кандай шарттарда (13) теңдемеси толук дифференциалдуу теңдеме болот деген суроо болушу мүмкүн.

18.2 Теорема. Эгерде $M(x, y)$, $N(x, y)$, $M_y(x, y)$ жана $N_x(x, y)$ функциялары

$$G = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$$

областында үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда (13) теңдемеси G областында толук дифференциалдуу теңдеме болушу үчүн,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \text{ же } \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in G \quad (14)$$

шартын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө. ► **Зарылдыгы:** (13) теңдемеси G областында толук дифференциалдуу теңдеме болсо, анда (14) нүн аткарылышын көрсөтөлү. (13) нүн толук дифференциалдык теңдеме болушу берилгендиктен, төмөндөгү барабардык орун алат

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Мындан биринчи барабардыктан y , экинчисинен x боюнча жекече туундуларды алсак, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Теореманын шартында коюлган шарттардан $F(x, y)$ функциясын аралаш туундуларын барабар болору келип чыккандыктан, (14) теңдештигин

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (14)$$

аткарылары келип чыгат.

Жетиштүүлүгү: ► Айталы (14) шарты аткарылсын, (13) теңдемесин G областында толук дифференциалдуу теңдеме болушун далилдейли. Ал үчүн (13) теңдемеси толук дифференциалы болгон кандайдыр бир $F(x, y)$ функциясын табуу же куруу керек.

Эгерде мындай $F(x, y)$ функциясы жашаса, анда ал

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ шарттарына баш ийиши керек. Алардын биринчисин аткарылсын деп ойлоп, эки жагын тең x боюнча интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \quad (C = g(y) - \text{турактуу катары}). \quad (15)$$

Эгерде $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ шарты аткарылганда $g(y)$ функциясын аныктай алсак, анда (14) шартына баш ийген $F(x, y)$ функциясын жашашы далилденет. (15) тен y боюнча туунду алсак,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y)dx \right] + g'(y) \text{ келип чыгат.}$$

Экинчи жактан $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ болору белгилүү.

$\frac{\partial F}{\partial y}$ жекече туундусун мындай эки маанилерин теңдештирип

$$N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + g'(y),$$

$$\text{же } g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y)dx \right] \quad (16)$$

туюнтулуусуна ээ болобуз. Эгерде (16) барабардыктын оң тарабы x тен көз каранды болбосо, анда биз издеген $g(y)$ функциясын (16) ны y боюнча интегралдап табууга болот.

Чынында эле (16) нын оң жагынан x боюнча туунду алып, (14) теңдештиги орун аларын пайдаланып

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \forall (x, y) \in G,$$

оң тарабынын нөлгө тең болоруна же x тен көз каранды эместигине ишенебиз.

(16) барабардыгын y боюнча интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$g(y) = \int [N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx] dy$$

Акыркыны (15) ке коюп, (13) теңдемеси толук дифференциалы болгон $F(x, y)$ функциясын

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + \int [N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx] dy \quad (17)$$

көрүнүштө курууга болот. ◀

Ошентип, теңдеменин толук дифференциалдуу болушун текшерүү үчүн, оболу (14) зарыл шартын текшерип көрүү керек. Анткени $M'_y \neq N'_x$ болсо, анда (13) теңдемеси толук дифференциалдуу теңдеме болбойт.

Мисалдар

7) $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$

дифференциалдык теңдемесин чыгаргыла.

► Бул теңдеме толук дифференциалдуу теңдеме болот, анткени берилген теңдеме кандайдыр бир $F(x, y) = xy^3$ функциясына толук дифференциал болот

$$dF = F_x dx + F_y dy = y^3 dx + 3xy^2 dy = 0.$$

Мында $F_x = y^3$, $F_y = 3xy^2$.

Демек, теңдеменин жалпы чечими $xy^3 = C$ (C – турактуу сан) болот. ◀

Эскертүү. Эгерде мисалдагы теңдемени y^2 ка бөлсөк ($y \neq 0$), анда

ага тең күчтүү (эквиваленттүү) болгон $y dx + 3x dy = 0$ дифференциалдык теңдемеси келип чыгат.

Бул теңдеме толук дифференциалдуу теңдеме болбойт, себеби мында $M(x, y) = y$, $N(x, y) = 3x$ жана $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$, б.а.

(14) зарыл шарты аткарылбай жатат.

$$8) (6xy - y^3) dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2) dy = 0$$

теңдемесин чыгаргыла.

► Мында $M(x, y) = 6xy - y^3$, $N(x, y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$

жана

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Эми $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ ти x боюнча интегралдап төмөнкүнү алабыз

$$F(x, y) = \int (6xy - y^3) dx = 3x^2y - y^3x + g(y).$$

Бирок $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ болгондуктан

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2x + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2.$$

Мындан

$$g'(y) = 4y.$$

Акыркы формуладан

$$g(y) = \int 4y dy + C = 2y^2 + C.$$

Мындан

$$F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C$$

Демек,

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C, (C - \text{турактуу сан})$$

берилген теңдеменин жалпы чечими болот. ◀

Эгерде (14) шарты аткарылбаса, анда берилген (13) теңдемеси толук дифференциалдуу болбойт. Бирок (13) теңдеменин эки жагын тең кандайдыр бир $\mu(x, y) \neq 0$ функциясына көбөйтсөк, толук дифференциалдуу теңдеме келип чыгышы мүмкүн болгон учурлар кездешет.

Ошондуктан (13) теңдеменин эки жагын $\mu(x, y)$ ке көбөйтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0 \quad (18)$$

(18) теңдемеси толук дифференциалдуу болушу үчүн (14) шарты

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

же

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M(x, y) + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N(x, y) + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \quad (19)$$

теңдештиги аткарылышы керек.

Эгерде (19) зарыл шарты аткарыла тургандай $\mu(x, y)$ функциясын табуу мүмкүн болсо, анда (18) теңдемеси толук дифференциалдуу теңдеме болот. Мындай $\mu(x, y)$ функциясы **интегралдоочу көбөйтүүчү** деп аталат.

Жалпы учурда интегралдоочу көбөйтүүчүнү табуу жеңил эмес. Бирок, төмөндөгүдөй айрым учурларда $\mu(x, y)$ ти табууну жеңилдетүүгө болот. Мисалы:

1) Эгерде $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} = \Phi(x)$ болсо, анда $\ln \mu = \int \Phi(x) dx$;

2) Эгерде $\frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M(x, y)} = \Phi_1(y)$ болсо, анда $\ln \mu = \int \Phi_1(y) dy$

көрүнүштөрдө табылышат.

Мисал. 9) $(x^2 - y) dx + x dy = 0$ теңдемесин

интегралдоочу көбөйтүүчүсүн тапкыла жана теңдемени чыгаргыла.

► Мында $M(x, y) = x^2 - y$,

$$N(x, y) = x, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \quad \text{болгондуктан}$$

$$\Phi(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} = \frac{-1 - 1}{x} = -\frac{2}{x} \quad \text{болору белгилүү.}$$

Демек

$$\ln \mu = \int \Phi(x) dx = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2 \ln x = \ln x^{-2} \quad \text{келип чыгып,}$$

интегралдоочу көбөйтүүчү $\mu(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ көрүнүштө табылат.

Анда берилген теңдемени $\mu = \frac{1}{x^2}$ ке көбөйтүп төмөнкүнү алабыз:

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \frac{1}{x} dy = 0.$$

Акыркы теңдемеге (17) формуланы колдонсок

$$F(x, y) = \int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{\partial}{\partial y} \int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx\right] dy =$$

$$= x + \frac{y}{x} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(x + \frac{y}{x}\right)\right] dy = x + \frac{y}{x} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right] dy = x + \frac{y}{x}$$

болот. Демек

$$x + \frac{y}{x} = C, \quad (C - \text{турактуу сан}).$$

$$\text{б.а. } y = x(C - x)$$

берилген теңдеменин жалпы чечими болот. ◀

4. КӨНҮГҮҮЛӨР

9. Төмөндөгү теңдемелердин толук дифференциалдык теңдеме экендигин текшерип андан кийин чыгаргыла.

1) $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0,$

2) $(4x - y)dx + (6y - x)dy = 0,$

3) $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0,$

4) $(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0,$

5) $(x^3 + \frac{y}{x})dx + (y^2 + \ln x)dy = 0,$

6) $(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0,$

7) $(\cos x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^y)dy = 0,$

8) $(\sin x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^{2y})dy = 0,$

9) $(x + \frac{1}{\operatorname{tgy}})dx + \frac{x+y}{1+y^2}dy = 0,$

10) $(3x^2y^3 + y^4)dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)dy = 0,$

11) $(\frac{2x}{y} - \frac{3y^2}{x^4})dx + (\frac{2y}{x^3} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{y}})dy = 0,$

12) $\frac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}dx + \frac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}dy = 0.$

18.2.4 Биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер. Турактууну вариациялоо усулу

Белгисиз $y(x)$ функциясына жана анын туундусуна карата сызыктуу

болгон

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (20)$$

көрүнүштөгү теңдеме, биринчи тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеме деп айтылат.

Эгерде бош мүчө $b(x) = 0$ болсо, анда (20) теңдемесин бир тектүү бөлүгү (“бт” – деп белгилейли)

$$y' + a(x)y = 0 \quad (21)$$

көрүнүштө жазылат. (21) теңдемесин

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

өзгөрүлмөлөрүн ажыратып интегралдасак,

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx$$

келип чыгып $\ln|y| = - \int a(x)dx + C$, бир тектүү бөлүктүн чыгарылышы

$$y_{бт} = e^{-\int a(x)dx+C} = e^C e^{-\int a(x)dx} = C e^{-\int a(x)dx} \quad (22)$$

табылат. Мында $C = e^C$ – каалагандай турактуу сан.

Берилген (20) теңдеменин жалпы чыгарылышын (“жч”)

$$y_{жч}(x) = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \quad (23)$$

көрүнүштө издейбиз. Мындай (22) деги C турактуусун $C(x)$ – жаңы белгисиз функция менен алмаштыруу усулу, турактууну вариациялоо усулу деп аталат. (23) түн туундусун

$$\begin{aligned} y' &= C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \cdot \left(- \int a(x)dx\right)' = \\ &= C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x) \cdot a(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \end{aligned} \quad (24)$$

эсептеп, (23) менен (24) маанилерин (20) теңдемесине коюп

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} - C(x) \cdot a(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + a(x)[C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}] &= \\ = b(x), \text{ топтоштурсак:} \end{aligned}$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = b(x) \quad \text{же} \quad C'(x) = b(x)e^{\int a(x)dx}$$

келип чыгат. Акыркыны интегралдап

$$C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C$$

ээ болобуз. Мында C – жаңы турактуу сан.

Табылган $C(x)$ ти (23) кө коюп,

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int a(x)dx} = \\ &= C \cdot e^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \end{aligned} \quad (25)$$

(20) теңдемесин жалпы чыгарылышын табабыз.

$$\text{Эгерде (20) теңдемеси } \begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Кошинин баштапкы шарты менен берилсе, анда жалпы чыгарылышты

$$\begin{aligned} y_{жч}(x) &= C \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(x)dx} + e^{-\int_{x_0}^x a(x)dx} \int b(x)e^{\int_{x_0}^x a(x)dx} dx = \\ &= e^{-\int_{x_0}^x a(x)dx} \cdot \left[C + \int b(x)e^{\int_{x_0}^x a(x)dx} dx \right] \text{ же} \\ y_{жч}(x) &= e^{-\int_{x_0}^x a(x)dx} \cdot \left[y_0 + \int b(x)e^{\int_{x_0}^x a(x)dx} dx \right] \end{aligned} \quad (26)$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында $C = y_0(x_0) = y_0$ деп алынды.

Мисал. 10) $xy' - 2y = 2x^4$ теңдемесин чыгаргыла.

► Берилген теңдемеден y' ти тапсак, анда ал теңдемени

$$y' = \frac{2}{x} y + 2x^3$$

түрүндө жаза алабыз. Мындан

$$a(x) = -\frac{2}{x}, \quad b(x) = 2x^3$$

Эми (25) формуланын негизинде, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз:

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} C + e^{\int \frac{x}{2} dx} \int e^{-\frac{2}{x} dx} 2x^3 dx = \\
&= e^{\ln x^2} C + e^{\ln x^2} \int e^{\ln x^{-2}} 2x^3 dx = Cx^2 + x^2 \int x^{-2} 2x^3 dx = \\
&= Cx^2 + x^2 \int 2x dx = Cx^2 + x^4.
\end{aligned}$$

Демек берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y_{жч}(x) = Cx^2 + x^4$$

болот. Мында C – каалагандай турактуу сан. ◀

Биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес (20) дифференциалдык теңдемесин жаңы өзгөрүлмөлөрдү киргизүү же белгилөө усулу менен да чыгарууга болот. Ал үчүн чыгарылышты жаңы белгилөөдө

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad (27)$$

көрүнүштө издейбиз. Мында $u(x)$, $v(x)$ – жаңы белгисиз функциялар.

Туундусун $y' = [u(x) \cdot v(x)]' = u' \cdot v + u \cdot v'$ эсептеп y, y' тердин жаңы белгилөөдөн кийинки маанилерин (20) теңдемесине коюп,

$$u' \cdot v + u \cdot v' + a(x) \cdot u \cdot v = b(x)$$

топтоштуруп $u(x)$, $v(x)$ өзгөрүлмөлөрүнө карата

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + a(x) \cdot v] = b(x) \quad (28)$$

дифференциалдык теңдемесин алабыз.

$v(x)$ функциясы деп, $v' + a(x) \cdot v = 0$ теңдемесин каалагандай $v(x) \neq 0$ чыгарылышын алсак, анда (28) теңдеме өзгөрүлмөлөрү ажыралма

$$u' \cdot v = b(x) \Leftrightarrow du = \frac{b(x)}{v(x)} dx$$

дифференциалдык теңдемеге айланат. Акыркыдан интеграл алып $u(x)$ функциясын табууга болот. Табылган $u(x)$ менен $v(x)$ функцияларын (27) ге коюп, (20) теңдемесинин $y(x)$ – чыгарылышын аныктайбыз.

Мисал. 11) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$ теңдемесин чыгаргыла.

► $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ белгилөөсүн киргизип, берилген теңдемени

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + 2x \cdot v] = x e^{-x^2}$$

көрүнүштө өзгөртүп жазып, $v' + 2x \cdot v = 0$ шартына баш ийген

$$\frac{dv}{v} = -2x dx \quad \Leftrightarrow \quad v = C e^{-x^2}$$

чыгарылышын табабыз. $C = 1$ деп алып, бул маанини өзгөртүп жазылган теңдемеге коюп,

$$du = \frac{x e^{-x^2} dx}{e^{-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad u = \int x dx + C = \frac{x^2}{2} + C$$

ээ болобуз. Табылган функцияларды белгилөөгө коюп, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын

$$y(x) = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \text{ табабыз. } \blacktriangleleft$$

5. КӨНҮГҮҮЛӨР

10. Төмөндөгү теңдемелерди чыгаргыла:

1) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x} e^{-x^2};$

2) $y' - \frac{3y}{x} = x,$

3) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x;$

4) $xy' + y = \ln x + 1;$

5) $(1+x^2)y' + xy = 1;$

6) $(2x+1)y' + y = x;$

7) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x;$

8) $y' + y \cos x = \sin 2x;$

9) $y' = (1-y) \cos x.$

11. Төмөндөгү Кошинин маселесин чыгаргыла:

1) $(1 + x)y' + y = \cos x; \quad y(0) = 1;$

2) $y' = 1 + x + y + xy; \quad y(0) = 0;$

3) $(x^2 + 4)y' + 3xy = x; \quad y(0) = 1;$

4) $xy' = 3y + x^4 \cos x; \quad y(2\pi) = 0.$

18.2.5 Риккатинин теңдемеси

$$\frac{dy}{dx} = b(x) + a(x)y + r(x)y^2 \quad (29)$$

көрүнүштөгү биринчи тартиптеги сызыктуу эмес жана бир тектүү болбогон дифференциалдык теңдеме Риккатинин теңдемеси деп аталат. Мында $b(x)$, $a(x)$, $r(x)$ – белгилүү функциялар.

Эгерде a, b, r – турактуу сандар болушса, анда (29) теңдемеси өзгөрүмөлөрү ажыралма

$$\frac{dy}{a + by + ry^2} = dx$$

көрүнүшкө келип,

$$\int \frac{dy}{a + by + ry^2} = x + C$$

жалпы чыгарылышына ээ болот. Ал эми $r(x) = 0$ болсо, Риккатинин теңдемеси (20) көрүнүштөгү биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү теңдемеге айланат.

Жалпы учурда (29) теңдемесин таблицалык интегралдарга келтирип эсептөөгө болбойт (квадратуралануучу эмес). Ошондой болсо да айрым бир шарттарды коюу менен, аны жеңил интегралдануучу теңдемеге келтирүүгө болот.

Айталы, $y = y_1(x)$ функциясы (29) теңдемесин кандайдыр бир жекече чечими болсун, анда аны теңдемеге койсок

$$y_1'(x) = b(x) + a(x)y_1(x) + r(x)y_1^2(x) \quad (30)$$

теңдештиги орун алат. Жаңы $z(x)$ белгисиз функциясын киргизип, (29) теңдемесин чыгарылышын $y = y_1(x) + z(x)$ көрүнүштө издейли. Болжолдонгон чыгарылышты (29) теңдемесине коюп

$$y_1'(x) + z'(x) = b(x) + a(x)y_1(x) + a(x)z(x) + r(x)y_1^2(x) + r(x)[2y_1(x)z(x) + z^2(x)],$$

(30) теңдештигин эске алып,

$$z'(x) - [a(x) + 2y_1(x)r(x)]z(x) = z^2(x)r(x)$$

квадратуралануучу (таблицалык интегралга келүүчү) дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз.

Мисал. 12) Риккатиинин $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$ теңдемесини $y_1 = e^x$ жекече чыгарылышы белгилүү болсо, анда аны интегралдагыла.

► Берилген теңдемеге $y = e^x + z(x)$ белгилөөсүн коюп, $z(x)$ ке карата

$$z'(x) = z^2 \Leftrightarrow \frac{dz}{z^2} = dx$$

теңдемесин $-\frac{1}{z} = x + C$ же $z = \frac{1}{C-x}$ чыгарылышын табабыз.

Мында $C = -C$ эркин алынган турактуу. Бул учурда берилген теңдеме

$y = e^x + z(x) = e^x + \frac{1}{C-x}$ чыгарылышына ээ. ◀

18.2.6 Бернуллинин теңдемеси

Өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу жолу менен сызыктуу теңдемеге келтирилүүчү теңдемелердин катарына Бернуллинин биринчи тартиптеги сызыктуу эмес

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha - const \quad (31)$$

теңдемеси кирет. Берилген теңдеме ар дайыма нөлдүк $y = 0$ чечимине ээ, анын $y \neq 0$ чечимдерин табуу маселесин карайбыз.

Эгерде $\alpha = 1$ болсо, (31) теңдемеси

$$\frac{dy}{dx} + [a(x) - b(x)] y = 0$$

көрүнүшүндөгү бир тектүү, квадратуралануучу теңдемеге айланары көрүнөт. Ал эми $\alpha = 0$ болсо, (31) теңдемеси

$$\frac{dy}{dx} + a(x) y = b(x)$$

бир тектүү эмес болуп, $\alpha = 1$ болгон учурдай эле сызыктуу (бир тектүү эмес) теңдемелерди чыгарууда колдонулган ыкмалар менен интегралданат. Ошондуктан $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ болгон учурларга токтолобуз:

1) $z(x) = y^{-\alpha+1}$ ордуна коюусун жүргүзүп, Бернуллинин теңдемесин $z(x)$ белгисиз функциясына карата сызыктуу теңдемеге келтирүүгө болот.

► Чынында эле,

$$y = \sqrt[-\alpha+1]{z} = z^{\frac{1}{-\alpha+1}} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{-\alpha+1} z^{\frac{1}{-\alpha+1}-1} = \frac{z^{\frac{\alpha}{-\alpha+1}}}{-\alpha+1} \cdot z'$$

маанилерин (31) теңдемесине коюп,

$$\frac{z^{\frac{\alpha}{-\alpha+1}}}{-\alpha+1} \cdot z' + a(x) \cdot z^{\frac{1}{-\alpha+1}} = b(x) \cdot \left(z^{\frac{1}{-\alpha+1}}\right)^\alpha \quad \text{же}$$

$$\frac{z^{\frac{\alpha}{-\alpha+1}}}{-\alpha+1} \cdot z' + a(x) \cdot z^{\frac{1}{-\alpha+1}} = b(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{-\alpha+1}}$$

ээ болобуз. Мындан $z^{\frac{\alpha}{-\alpha+1}} \neq 0$ деп эсептеп, акыркыны ага бөлүп жиберсек $z(x)$ белгисизине карата

$$\frac{1}{-\alpha+1} \cdot z' + a(x) \cdot z^{\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{\alpha}{-\alpha+1}} = b(x) \quad \text{же}$$

$$z' + (-\alpha + 1)a(x) \cdot z = (-\alpha + 1)b(x),$$

сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдеме келип чыгат.

2) Бернуллинин теңдемесин турактууну вариациялоо усулу менен да чыгарууга болот.

Ал үчүн оболу (31) дин

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$$

бир тектүү бөлүгүнүн

$$y = Ce^{-\int a(x)dx}$$

жалпы чыгарылышын таап, (31) теңдеменин чечимин

$$y = C(x)e^{-\int a(x)dx} \quad (*)$$

көрүнүштө издейбиз. Мында $C(x)$ – жаңы белгисиз функция.

$$\begin{aligned} y' &= C' \cdot e^{-\int a(x)dx} + C \cdot (e^{-\int a(x)dx})' = \\ &= C' \cdot e^{-\int a(x)dx} - C \cdot a(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \end{aligned}$$

туундусун эсептеп, (*) ны эске алып (31) ди

$$\begin{aligned} C' \cdot e^{-\int a(x)dx} - C \cdot a(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + a(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} &= \\ &= b(x)(C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx})^\alpha \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C' \cdot e^{-\int a(x)dx} = b(x) \cdot C^\alpha(x) \cdot e^{-\alpha \int a(x)dx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'(x) = b(x) \cdot [C(x)]^\alpha \cdot e^{(1-\alpha) \int a(x)dx}$$

өзгөрүлмөлөрү ажыралма

$$\frac{dC}{C^\alpha} = b(x) \cdot e^{(1-\alpha) \int a(x)dx} dx$$

теңдемесине келтирип, интегралдаган соң

$$\frac{[C(x)]^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int b(x) \cdot e^{(1-\alpha) \int a(x)dx} dx + C_1$$

ээ болуп, (*) дан Бернуллинин теңдемесин жалпы

$$[y(x)]^{1-\alpha} = (1-\alpha)e^{(\alpha-1)\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{(1-\alpha)\int a(x)dx} dx + C_1 \right]$$

чыгарылышын таба алабыз. Мында C_1 – эркин алынган турактуу.

Мисал. 13) $y' - y \operatorname{tg} x = -y^2 \cos x$ теңдемесин чыгаргыла.

► Чыгарылышты $y = u(x) \cdot v(x)$ көрүнүштө издейли. y, y' тердин u, v лар менен туюнтулуштарын берилген теңдемеге коюп, топтоштуруп жаңы белгисиздерге карата

$$u'v + (v' - v \operatorname{tg} x)u = -u^2 v^2 \cos x$$

теңдеш өзгөртүлгөн теңдемеге ээ болобуз. $v(x)$ ти

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

теңдемесин кандайдыр нөл эмес жекече чыгарылышы катарында тандайлы. Мындай чечим деп, акыркы теңдеменин $v(x) = \frac{C}{\cos x}$ жалпы чыгарылышын $C = 1$ болгон учурдагы, $v(x) = \frac{1}{\cos x}$ – жекече чыгарылышын алууга болот. Теңдеш өзгөртүлгөн теңдемеге $v(x)$ тин табылган маанисин коюп, $u(x)$ ке карата

$$u' = -u^2$$

теңдемесин алабыз. Аны интегралдасак $u(x) = \frac{1}{x+C}$ чыгарылышы табылат. Демек, берилген теңдеменин жалпы чечими

$$y = u(x) \cdot v(x) = \frac{1}{(x+C) \cos x} \text{ функциясы болот. } \blacktriangleleft$$

§18.3 $y' = f(x, y)$ теңдемесин жакындаштырып интегралдоо усулдары

18.3.1 Изоклиндер усулу

Айталы

$$y' = f(x, y) \tag{32}$$

теңдемеси берилип, $f(x, y)$ функциясы xOy координаттык тегиздигин кандайдыр бир G областында 18.1 – теореманын (жалгыз гана чечимдин жашашы жөнүндөгү) шарттарын канааттандырсын. Анда (32) теңдемесин $y = \varphi(x)$ – интегралдык ийрине (чечимине) G областын ар бир $(x_0; y_0)$ чекиттеринде жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти

$$k = y'(x)|_{x=x_0} \equiv f(x_0, y_0)$$

барабар болушу керек. Ар башка $(x_0; y_0)$ чекиттеринде түрдүү багыттардагы жанымалар, теңдеменин багыттарын талаасын түзөрү белгилүү.

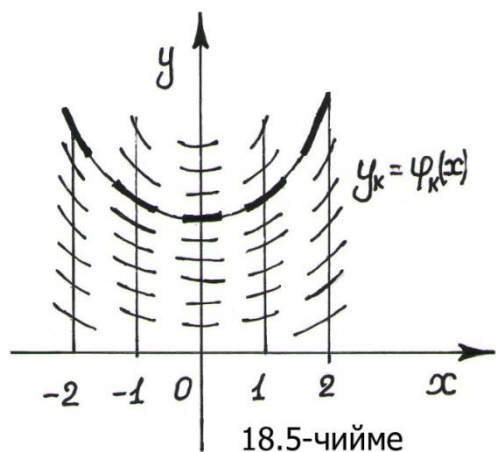
*Изделүүчү интегралдык ийрилерге жүргүзүлгөн жанымалар бирдей багыттарда ($y' = \text{const.}$) боло тургандай xOy координаттык тегиздигиндеги чекиттердин көптүгүн, **изоклиндер** дейбиз.*

Изоклиндер усулу, ар бир $(x_0; y_0)$ чекитин аймакчасында жанымалары теңдеменин багыттарын талаасы менен дал келген интегралдык ийрилерди (локалдык чыгарылыштарды) таап, аларды кийинки чекитер үчүн аныкталган локалдык чыгарылыштар менен улаштырып олтуруп, кыркындылардан кураштырылып түзүлгөн интегралдык ийрини (чыгарылышты) куруу ыкмасына негизделген. Адатта мындай чыгарылыш графиктик ыкма менен түзүлөт.

Демек, (32) теңдемесинин изоклиндерин топтому,

$$\boxed{k = f(x, y)} \quad (33)$$

теңдемесин чыгарылышы катарында аныкталат. k сандык параметрине бири – бирине жакын маанилерди берүү менен, изоклиндердин жетишерлик жакын тармагын түзүү мүмкүн. Мындай мүмкүнчүлүк, (33) теңдемесин y ке карата чыгарып, $y_k = \varphi_k(x)$ сыяктуу кыркынды чыгарылыштарынан улаштырып куралган функцияны – жакындаштырылган чыгарылышы катары алууга шарт түзөт.



Мисал. 14) $y' = x$ теңдемесин чыгарылышын изоклиндери боюнча кураштырып түзгүлө.

► Берилген теңдеменин изоклиндерин топтому $x = k$ теңдемесин канааттандырган интегралдык ийрилери турат.

Демек, $k = 0, +1, -1, +2, -2 \dots$ маанилеринде

$x = 0, x = 1, x = -1, x = 2, x = -2, \dots$,

изоклиндеринен куралган чыгарылышты жакындаштырып табууга болот. (18.5 – чийме). ◀

Нөлдүк $k = f(x, y) = 0$ изоклини, интегралдык ийрилердин (чыгарылыштарын) экстремумга шектелген бардык стационардык чекиттерин көптүгүн аныктайт.

Мисалы, жогоруда каралган $y' = x$ теңдемесин нөлдүк изоклини $x = 0$ түзү болот.

Интегралдык ийрилерди тагыраак кураштырып түзүү үчүн, алардын иймектик багыттарын аныкташат. Ал үчүн (32) ден экинчи тартиптеги туундусун эсептеп

$$y'' = f'_x + f'_y \cdot y' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y),$$

интегралдык ийринин (чечимдин) иймектикке шектелген бардык чекиттерин көптүгү

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y) = 0$$

теңдемесин чыгарылыштары менен аныкталарын көрөбүз.

Жогоруда каралган мисалда $y'' = 1 > 0$ болгондуктан, бардык интегралдык ийрилердин иймектик багыттары жогору карап (иймек), иймектик багыттары алмашкан же ийилген чекиттерге ээ эмес.

18.3.2 Ырааттуу жакындашуу ыкмасы

$$\text{Айталы } y' = f(x, y) \quad (34)$$

теңдемеси берилип, $f(x, y)$ функциясы кандайдыр бир G областында 18.1 – теореманын шарттарын канааттандырсын. G областынан $(x_0; y_0)$ чекитин алып, (34) теңдемесине Кошинин

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (35)$$

маселесин карайлы.

Кошинин (35) маселесин, ага тең күчтүү болгон интегралдык теңдеме (белгисиз функция интеграл алдында турган) менен алмаштырууга болот. Чынында эле, эгерде $y = y(x)$ функциясы кандайдыр бир $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ интервалында (35) теңдеменин x_0 чекитинде баштапкы шартты канааттандырган чечими болсо, анда

$$\forall x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0): \frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

теңдештиги орун алат. Теңдештикти x боюнча интегралдап

$$y(x) = C + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

баштапкы шарттан $y(x_0) = y_0 = C$ турактууну аныктап, акыркы интегралды Кошинин (35) маселесин канааттандырган

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (36)$$

интегралдык теңдеме катары жазабыз.

Тескерисинче, $x \in (x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ – аймакчасында үзгүлтүксүз $y = y(x)$ функциясы (36) теңдемесине чечим болсо, анда аны дифференцирлөө менен $y(x)$ тин Кошинин (35) маселесин чечими болорун текшерип көрүүгө болот.

Ырааттуу жакындашуу ыкмасы, (35) ке тең күчтүү болгон (36) интегралдык теңдемесин x_0 чекитин жакынкы аймакчасындагы x чекиттеринде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

эрежеси боюнча $y = \varphi(x)$ чечимине пределдик абалда жакындап келүүгө негизделген. Мында $\varphi_n(x)$ деп,

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

интегралдык теңдемелерин канааттандырган, $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ – туюк аймакчасында үзгүлтүксүз функцияларды алууга болот, маселен

$\varphi_0(t) = y_0 - const$ деп.

Мисал. 2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(x), \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Кошинин маселесин ырааттуу

жакындашуу ыкмасы менен чыгаргыла.

► Берилген маселени

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt,$$

ага тең күчтүү болгон интегралдык теңдемеге келтиребиз.

Нөлдүк жакындашуу катары $\varphi_0(x) = 1$ санын алып, ырааттуу түрдө

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \varphi_0(t) dt = 1 + \int_0^x dt = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \varphi_1(t) dt = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

.....

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x \varphi_{n-1}(t) dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \quad \text{ээ болобуз.} \quad \text{Мындан берилген}$$

маселенин чечими

$$y = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = e^x$$

функциясы болору келип чыгат. ◀

18.3.3 Кошинин маселесин сандык эсептөөлөр аркылуу чыгаруу

1. Эйлердин ыкмасы

Кошинин төмөндөгү маселесин жакындаштырылган чечимин табуу талап кылынсын:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (37)$$

Айталы, кандайдыр бир $D = \{|x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B\}$ төрт бурчтугунда $f(x, y)$ функциясын бардык аргументтер боюнча жетишерлик чоң тартипке чейинки үзгүлтүксүз жекече туундулары жашасын дейли. Бул учурда 18.1 – теоремасын негизинде Кошинин маселесин жалгыз гана чечими жашап, ал жетишерлик чоң тартипте дифференцирленүүчү функция болот.

Кошинин (37) маселесин чечимин сандык эсептөөлөрдүн жардамы менен чыгаруу ыкмасы, D төрт бурчтугунда жайгашкан

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ чекиттериндеги маселенин чыгарылышын,

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ жакындаштырылган маанилеринин таблицасын түзүү менен ишке ашырылат.

Көбүнчө x_k чекиттерин $x_k = x_0 + k h$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) көрүнүштө тандап, x_k чекиттерин торчолордун түйүнү, ал эми $h > 0$ – санын (чоңдугун) торчонун кадамы деп атайбыз.

Туундунун аныктамасы боюнча

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

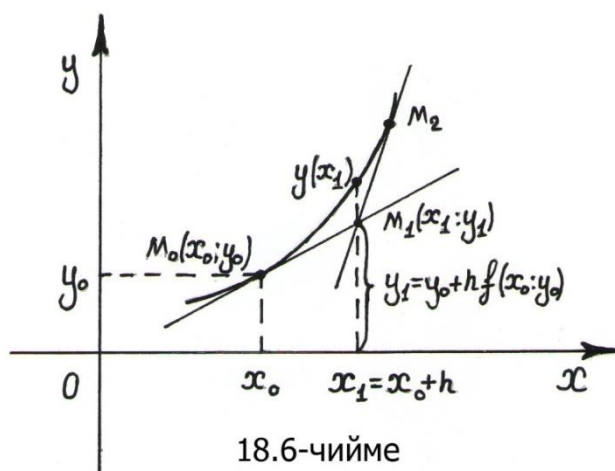
болгондуктан, туундуну жакындаштырып $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ айырмаларын катышы менен алмаштырып, (37) дифференциалдык теңдемесин

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) \text{ же}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

көрүнүштөгү айырмалардын алгебралык теңдемеси менен алмаштырабыз. Акыркыдан $y(x_0) = y_0$ баштапкы шартын (белгилүү чоңдук) эске алып, ырааттуулук менен $y_k = y(x_k)$ сандык маанилерин улам таап олтурабыз.

Натыйжада, $y = y(x)$ чечимин ордуна, аргументтин x_k – дискреттик маанилеринде



аныкталган (37) маселесин чыгарылыштарын $y_k = y(x_k)$ торчо – функцияларын сандык маанилерине ээ болбуз.

Бул учурда $M_0(x_0; y_0)$ чекити аркылуу өткөн изделүүчү интегралдык ийри (чечим), геометриялык жактан чокулары $M_k(x_k; y_k)$ чекиттери болгон

Эйлердин $M_0M_1M_2 \dots$ сынык сызыктары менен алмаштырылган деп түшүндүрүлөт (18.6 – чийме).

Эйлердин ыкмасы бир кадамдан жүргүзүлүп, $M_{k+1}(x_{k+1}; y_{k+1})$ чекитиндеги чыгарылышты эсептеп аныктоо үчүн, андан мурдагы эсептелип табылган бир гана $M_k(x_k; y_k)$ чекитин билүү жетиштүү болот. Торчо боюнча кийинки кадамга өтүүдө кетирилген каталыкты аныктоо үчүн, $x = x_k$ түйүн чекитинде $y = y(x)$ – накта чыгарылышын Тейлордун формуласы боюнча ажыратабыз (биринчи тартиптеги туундусуна чейин).

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k) h + O(h^2) =$$

$$= y(x_k) + hf(x_k, y_k) + O(h^2) \quad (39)$$

(38), (39) формулаларын салыштырып, алардын h ка карата биринчи тартиптеги мүчөлөрүнө чейинки тактыкта дал келишерин көрөбүз. Демек, берилген (37) дифференциалдык теңдемесинен айырмалардын (38) алгебралык теңдемесине өтүүдө кетирилген катачылыктын чоңдугу $O(h^2)$ ке барабар болот. Кетирилген каталык Тейлордун формуласындагы биринчи тартиптеги мүчөлөрдүн деңгээлинде ченелгендиктен, Эйлердин ыкмасын биринчи тартипте деп айтабыз. Айрым учурларда $h > 0$ кадамдарында y_k нын маанилери накта чечим менен дал келип калышы да мүмкүн

Мисал. 3) $[0, 0,5]$ кесиндисинде $h = 0,1$ кадамы менен Эйлердин ыкмасын колдонуп, Кошинин

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \quad \text{маселесин чыгарылышын эсептегиле.}$$

$$y(0) = 2$$

► Бул учурда $f(x, y) = y - x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ болгондуктан, (38) формуласынан эсептөө

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0,1 \cdot (2 - 0) = 2,2,$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2,2 + 0,1 \cdot [2,2 - (0 + 0,1)] = 2,41,$$

.....

процессин y_5 ке чейин улантып (кесинди аяктайт), эсептөөнүн натыйжасын таблица көрүнүштө жазабыз:

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$h(x_k, y_k)$	$y = e^x + x + 1$ накта чечими
0	0	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000
1	0,1	2,2000	2,1000	0,2100	2,2052
2	0,2	2,4100	2,2100	0,2210	2,4214

3	0,3	2,6310	2,3310	0,2331	2,6499
4	0,4	2,8641	2,4641	0,2464	2,8918
5	0,5	3,1105			3,1487

◀

$$4) \frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Кошинин маселесин Эйлердин методу менен $n = 10$ үчүн ($h = 0,1$) жакындаштырып чыгаргыла жана аны

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

так чыгарылышы менен салыштыргыла.

► Бул учурда $f(x,y) = x + y$ экендигин жана (38) итерация формуласын эске алсак, анда

$$y_{k+1} = y_k + h(x_k + y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9.$$

Мында $x_0 = 0, y_0 = 1$ болгондуктан, бул итерация формуласынан

$$x_1 = 0,1; \quad y_1 = 1 + 0,1(0+1) = 1,1;$$

$$x_2 = 0,2; \quad y_2 = 1,1 + 0,1(0,1+1,1) = 1,22;$$

$$x_3 = 0,3; \quad y_3 = 1,22 + 0,1(0,2+1,22) = 1,362;$$

ж.б.у.с. улантып y_4, \dots, y_{10} ду табабыз. (38) формула аркылуу x_k чекиттеринде эсептелген $y(x)$ тин так маанисин $y(x_k)$ болгондугун эске алсак, анда

$$y_{так} - y_{жакын} = y(x_k) - y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9, 10$$

формуласы аркылуу берилген маселенин так чыгарылышы менен жакындаштырылган чыгарылыштын ортосундагы "кетирилген каталык" аныкталат. Ал эми

$$100 \cdot (y_{так} - y_{жакын}) / y_{так} \%$$

формуласы аркылуу "ката процент менен" аныкталат. Берилген Кошинин маселеси үчүн, алардын бардыгы төмөнкү 1 – таблицада көрсөтүлгөн. ◀

Таблица 1.

k	x_k	Жакындаш- тырылган y_k	Такталган $y(x_k)$	Каталык $y(x_k) - y_k$	Ката процент менен
0	0,0	1	1	0	0%
1	0,1	1,1	1,1103	0,103	0,93%
2	0,2	1,22	1,2428	0,0228	1,84%
3	0,3	1,362	1,3997	0,0377	2,69%
4	0,4	1,5282	1,5836	0,0554	3,5%
5	0,5	1,721	1,7974	0,0764	4,25%
6	0,6	1,9431	2,0442	0,1011	4,95%
7	0,7	2,1974	2,3275	0,1301	5,59%
8	0,8	2,4872	2,6511	0,1639	6,18%
9	0,9	2,8159	3,0192	0,2033	6,73%
10	1,0	3,1875	3,4366	0,2491	7,25%

ЭСКЕРТҮҮ. Эгерде h кадамы кичирейгенде, б.а. n чоңойгондо, Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаргандагы "кетирилген каталык" чоңоюп барат. Ошондуктан Эйлердин жакшыртырылган методу сунуш кылынган

2. Эйлердин жакшыртылган методу.

Төмөнкү

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

Кошинин маселесин, Эйлердин жакшыртылган методу менен жакындаштырып эсептөө төмөнкү схема боюнча жүргүзүлөт:

$$x_0 = a, y_0 = y_0, h = \frac{b-a}{n},$$

$$u_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})].$$

Бул учурда "кетирилген каталык" үчүн

$$|y(x_k) - y_k| \leq ch^2, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (38)^{\text{Ж}}$$

барабарсыздыгы аткарылат. Мында c белгилүү турактуу саны h кадамынан көз каранды эмес. Демек (38) барабарсыздыктан Эйлердин жакшыртылган методу Эйлердин методуна караганда тагыраак экендиги келип чыгат. Аны бизге төмөнкү мисал да көрсөтөт.

5) Жогоруда каралган 4 – мисалга Кошинин маселесин

$$\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1, x \in [0, 1],$$

Эйлердин жакшыртылган методу менен жакындаштырып чыгаралы, анда y_{k+1} ни

$$u_{k+1} = y_k + h(x_k + y_k), k = 0, 1, 2, \dots, 9,$$

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{1}{2} [(x_k + y_k) + (x_{k+1} + u_{k+1})]$$

формулалары менен эсептейбиз. Ал эми $n = 10, h = 0,1$ үчүн эсептесек:

$$k = 0, u_1 = 1 + (0,1)(0+1) = 1,1,$$

$$y_1 = 1 + (0,05) [(0+1) + (0,1+1,1)] = 1,11,$$

$$k = 1, u_2 = 1,11 + (0,1)(0,1+1,11) = 1,231,$$

$$y_2 = 1,11 + (0,05) [(0,1+1,11) + (0,2+1,231)] = 1,24205,$$

ж.б.у.с. улантыш $u_3, u_4, \dots, u_{10}, y_{10}$ ду табабыз. Төмөндөгү 2 – таблицада, Кошинин маселесин чыгарылышын Эйлердин (38) методу

жана Эйлердин жакшыртылган (38)^ж методу менен жакындаштырып эсептегендеги чыгарылыштын маанилери менен кошо, $y(x) = 2e^x - x - 1$ формуласы менен эсептеген такталган маанилер келтирилген.

Таблица 2.

x	Эйлердин методу $h=0,1; y_k$	Эйлердин жакшыр-тылган $h=0,1; y_k$	y тин такталган мааниси б.а. $y(x_k)$
0,1	1,1	1,11	1,1103
0,2	1,22	1,2421	1,2428
0,3	1,362	1,3985	1,3997
0,4	1,5282	1,5818	1,5836
0,5	1,721	1,7949	1,7974
0,6	1,9431	2,0409	2,0442
0,7	2,1974	2,3231	2,3275
0,8	2,4872	2,6456	2,6511
0,9	2,8159	3,0124	3,0192
10	3,1875	3,4282	3,4366

Бул 2 – таблицада чындыгында эле Эйлердин жакшыртылган методу Эйлердин методунан тагыраак экендиги көрүнөт.

ЭСКЕРТҮҮ: Практикада Кошинин маселесин жакындаштырып чыгаруу үчүн, ал маселеге Эйлердин методу же Эйлердин жакындаштырылган методу менен биринчи алгоритмин, экинчи программасын түзүп, андан кийин компьютердин жардамы менен, берилген Коши маселесин жакындаштырылган чыгарылышын таблица түрүндө же график түрүндө табабыз.

2. Рунге - Куттанын ыкмасы

Эйлердин сандык эсептөө ыкмасы жөнөкөй болгону менен, тактыгы төмөн болот. Ошондуктан айырмалардын теңдемесин схемасын татаалдантуу менен эсептөө тактыгын жогорулатабыз. Мындай схемалардын бири катарында практикада кеңири колдонулган Рунге – Куттанын схемасын кыскача баяндайлы.

Кошинин (37) маселесин чыгаруу үчүн, торчолордун түйүнү катары алынган

x_1, x_2, \dots, x_n чекиттериндеги $y = y(x)$ – чыгарылыштарын жакындаштырылган y_1, y_2, \dots, y_n маанилерин таблицасын түзөбүз.

Бирдей узактыкта жайгашышкан $x_k = x_0 + k h$ түйүндөрүн карайлы. Мында $h > 0$ – торчонун кадамы. Рунге – Куттанын ыкмасында y_{i+1} чи

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

схемасы боюнча эсептелет. Мында

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

6. КӨНҮГҮҮЛӨР

$[0; 0,5]$ сегментинде төмөндөгү Кошинин маселелерин такталган чыгарылышын тапкыла. Андан кийин Эйлердин методу жана Эйлердин жакшыртылган методу менен $[0; 0,5]$ сегментинде жакындаштырып чыгаргыла. Мында компьютерди колдонсоңор (алгоритмди жана программаны түзүп) да болот (12 - 20).

12. $\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 2, n = 5, h = 0,1.$

13. $\frac{dy}{dx} = 2y, y(0) = \frac{1}{2}, n = 5.$

14. $\frac{dy}{dx} = y+1, y(0) = 1, n = 5.$

15. $\frac{dy}{dx} = x - y, y(0) = 1, n = 5.$

16. $\frac{dy}{dx} = y - x - 1, y(0) = 1, n = 5.$

17. $\frac{dy}{dx} = -2xy, y(0) = 2, n = 5.$

18. $\frac{dy}{dx} = -3x^2 y, y(0) = 3, n = 5.$

19. $\frac{dy}{dx} = e^{-y}, y(0) = 0, n = 5.$

20. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(1+y^2), y(0) = 1, n = 5.$

Төмөндөгү Кошинин маселелерин Эйлердин жакшыртылган методу менен жакындаштырып чыгаргыла. Эсептөө үчүн компьютерди колдонсоңор болот (21-36).

21. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2, y(0) = 1, 0 \leq x \leq 1, n = 10.$

22. $\frac{dy}{dx} = y - 2, y(0) = 1, 0 \leq x \leq 1, n = 10.$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(y-1)^2, y(0) = 2, 0 \leq x \leq 1, n = 10.$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y}, y(1) = 3, 1 \leq x \leq 2, n = 10.$

25. $xy' = y^2, y(1) = 1, 1 \leq x \leq 2, n = 10.$

26. $xy' = 3x - 2y, y(2) = 3, 2 \leq x \leq 3, n = 5, n = 10.$

27. $y^2 y' = 2x^5, y(2) = 3, 2 \leq x \leq 3, n = 5, n = 10.$

28. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0, 0 \leq x \leq 1, n = 5, n = 10.$

29. $y' = x^2 - y^2, y(0) = 0, 0 \leq x \leq 2, n = 10.$

$$30. y' = x + \sqrt{y}, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad n = 10.$$

$$31. y' = x + \sqrt[3]{y}, \quad y(0) = -1, \quad 0 \leq x < 2, \quad n = 10.$$

$$32. y' = \ln y, \quad y(1) = 2, \quad 1 < x < 2, \quad n = 5, \quad n = 10.$$

$$33. y' = x^{2/3} + y^{2/3}, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad n = 10.$$

$$34. y' = \sin x + \cos y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 5, \quad n = 10.$$

$$35. y' = \frac{x}{1+y^2}, \quad y(-1) = 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n = 10.$$

$$36. y' = xy, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 5, \quad n = 10.$$

§18.4 Жогорку тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү дифференциалдык теңдемелер

18.4.1. "n" – тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын тургузуу

Жалпы учурда $x(t)$ белгисиз функциясына ($t \in (a, b) \subset R$) карата турактуу коэффициенттүү n – тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеме

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \quad (40)$$

көрүнүштө жазылат. Мында a_0, a_1, \dots, a_n – белгилүү чыныгы сандар, $a_0 \neq 0$, $L[x]$ – теңдеменин сол жагын

$$\mathbb{L}[x] = \left(a_0 \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_1(t) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{\partial}{\partial t} + a_n(t) \right) \cdot x$$

оператордук белгилениши.

Берилген теңдеме ар качан нөлдүк чыгарылышка ээ болору көрүнүп турат, бирок практикалык керектөөлөрдө көбүнчө нөлдүк эмес чыгарылыштарды издөөгө туура келет. Ошондуктан (40) теңдемесин чыгарылышын, n – тартиптеги туундуларына чейин нөлдөн айырмалуу жана туундулары бири – биринен көп айырмаланбаган функцияларга окшотуруп тандоо жана издөө максатка ылайык келет. Теңдеменин

накта чыгарылышы, сөзсүз *тандалган функциялар* көрүнүштөрүндө болбогону менен, izdelүүчү накта чыгарылышты, анын тандалган функциялардагы проекцияларынан кураштырып түзүлгөн функция катарында тургузууга болот. Мындай *тандалган* функциялардын катарына $e^{\lambda t}$ – функциясы да кирерин байкайбыз.

(40) теңдемесин чечимин $x(t) = e^{\lambda t}$ көрүнүшүндө издейли (λ – кандайдыр бир белгисиз сан, $t \in (a, b) \subset R$). Тиешелүү туундуларын эсептеп (40) теңдемесине койсок ,

$$L[e^{\lambda t}] \equiv (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) \cdot e^{\lambda t} = 0 \quad (41)$$

теңдештиги келип чыгат. Көбөйтүндү нөл болушу үчүн, алардын жок дегенде бирөөсү нөл болушу керек. Анда $e^{\lambda t} \neq 0$ болгондуктан, кашаанын ичи же

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (42)$$

болсо гана, izdelүүчү чечимди $x = e^{\lambda t}$ көрүнүштө издөөгө болот.

(42) теңдештигин, λ – санына карата түзүлгөн n – даражадагы алгебралык теңдеме катарында эсептеп, аны (40) дифференциалдык теңдемесин **мүнөздүк теңдемеси** деп айтабыз. Эгерде коэффициенттери чыныгы сандар болгон (42) мүнөздүк теңдеменин n сандагы ар башка $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ чыныгы чечимдерин табууга мүмкүн болсо, анда (40) теңдеменин n сандагы жекече чыгарылыштары

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, x_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$$

көрүнүштө жазылат. Мында C_1, C_2, \dots, C_n эркин алынган турактуу сандар.

Ошентип (40) дифференциалдык теңдемесин чыгаруу маселесин, белгисизи λ саны болгон сандык, б.а. мүнөздүк (42) теңдемени чыгаруу маселесине келтирүүгө болот.

Туунду алуу эрежесинин касиеттеринен, (40) дифференциалдык теңдемесин оператордук жазылышын камсыз кылган $L[x]$ – операторун сызыктуу болору келип чыгат. Анда

$$L[x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)] + \dots + L[x_n(t)] =$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 L[e^{\lambda_1 t}] + C_2 L[e^{\lambda_2 t}] + \dots + C_n L[e^{\lambda_n t}] = \\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0
\end{aligned}$$

орун алат, анткени λ_i – лер (42) мүнөздүк теңдеменин чечимдери болгондуктан,

$$a_0 \lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_i + a_n = 0$$

келип чыгып,

$$L[e^{\lambda_i t}] \equiv (a_0 \lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_i + a_n) \cdot e^{\lambda_i t} = 0$$

теңдештиктери орун алат ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$\text{Мындан } x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t \in (a, b) \subset R \quad (43)$$

функциялары (40) дифференциалдык теңдемесине жекече чыгарылыштар болушса, анда алардын суммасынан куралган

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) = \quad (44) \\
&= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}
\end{aligned}$$

сызыктуу комбинациясы да чыгарылыш болот деген жыйынтыкка келебиз.

18.3 Аныктама. Эгерде (a, b) интервалында (43) жекече чыгарылыштарын тобу сызыктуу көз каранды эмес системаны түзсө, б.а. чечимдердин сызыктуу комбинациясы бардык $C_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) болсо гана

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) = 0 \quad (45)$$

нөлгө тең болсо, анда (43) чыгарылыштардын **фундаменталдык (базистик) системасы** деп аталат.

Сызыктуу көз каранды система болгондо, айрым бир $C_i \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болсо деле, чыгарылыштардын (45) сызыктуу комбинациясы нөлгө тең боло берет ($i = 1, 2, \dots, n$).

Аныктамада базистик деп эскертип кеткенибиздин себеби, бардык жекече чыгарылыштардын көптүгү n ченемдүү мейкиндикти түзүп,

сызыктуу көз каранды эмес n сандагы жекече чыгарылыштар, б.а. чыгарылыштардын фундаменталдык системасы, түзүлгөн мейкиндикке базис болот. Ал эми (44) **жалпы чыгарылышы**, $x(t)$ функциясын базис боюнча ажыратылып жазылышы болуп эсептелет. n сандагы фундаменталдык системага, $(n + 1)$ – болгон башка бир чыгарылышты кошо албайбыз. Эгерде кайсы бир же бир канча жекече чыгарылышты ашыкча киргизсек же азайтып койсок, анда саны n ден көп же аз болгон жекече чыгарылыштардын системасы сөзсүз сызыктуу көз каранды болуп, фундаменталдык системаны түзө албайт.

18.3 Теорема. (a, b) интервалында аныкталган (43) чыгарылыштарын тобунун сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшү үчүн, интервалдын бардык t чекиттеринде алардын Вронскианын нөлдөн айырмалуу болушу зарыл жана жетиштүү.

(43) чыгарылыштарына Вронскиан же Вронскийдин аныктагычы

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad (46)$$

көрүнүштө жазылат (теореманы далилдөөсүз кабыл алабыз).

Мисалы $1, t, t^2$ функциялары, $n = 3$ болгон учурда каалагандай $t \in (a, b)$ интервалында сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшөт, анткени алардын Вронскианы (аныктагычы)

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ (1)' & (t)' & (t^2)' \\ (1)'' & (t)'' & (t^2)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

нөлдөн айырмалуу.

Жекече чыгарылыштардын тобунан турган чыгарылыштын фундаменталдык системасын түзүү менен, (40) дифференциалдык теңдеменин **жалпы чыгарылышы** деген түшүнүк киргизилет.

Эскертүү. (40) теңдемеде коэффициенттер турактуу комплекстик сандар болгон учурда жана коэффициенттер

$$a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t); a_0(t) \neq 0, t \in (a, b) \subset R$$

көрүнүштөгү белгилүү үзгүлтүксүз функциялар болгон учурларда деле, дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарын фундаменталдык системасы жогорудагыдай усул менен түзүлүп, 18.4 теоремасын ырастоосу орун алат.

18.4.2 Мүнөздүк теңдеме эселүү жана комплекстик тамырларга ээ болгон учурлар

(40) дифференциалдык теңдемесин мүнөздүк теңдемесин, λ – белгисиз санына карата

$$L(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (42)$$

көп мүчө теңдемеси катарында жазып, анын тамырлары ар башка n сандагы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ чыныгы сандары болгондо, чыгарылыштардын фундаменталдык системасы

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ көрүнүштө тургузулуп, (40) теңдемесин **жалпы чечими** (44) көрүнүштө жазыларына күбө болдук.

1) Эселүү тамырлар учуру.

$n = 2$ болгон учурда, $x(t)$ – белгисиз функциясына карата (40) дифференциалдык теңдемесин

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0 \quad (40^A)$$

көрүнүштө жазып, анын

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

мүнөздүк теңдемесине λ_1 саны, эки эселүү чыныгы тамырлар болушсун дейли.

λ_1 – санына туура келген сызыктуу көз каранды эмес биринчи жекече чыгарылыш катары $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ функциясын алабыз. Ал эми сызыктуу көз каранды эмес экинчи жекече чыгарылышты $x_2(t) = \varphi(t) e^{\lambda_1 t}$

көрүнүштө издейли. Мында $\varphi(t)$ – кошумча киригизилген белгисиз функция.

Экинчи жекече чыгарылышты жана анын тиешелүү

$$x_2'(t) = \varphi'(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \varphi(t) e^{\lambda_1 t},$$

$$\begin{aligned} x_2''(t) &= \varphi''(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \varphi'(t) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \varphi'(t) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 \varphi(t) e^{\lambda_1 t} = \\ &= \varphi''(t)e^{\lambda_1 t} + 2\lambda_1 \varphi'(t) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1^2 \varphi(t) e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

туундуларын (40^A) теңдемесине коюп топтоштурсак, анда

$$e^{\lambda_1 t} [\varphi'' + (2\lambda_1 + a_1)\varphi' + (\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2)\varphi] = 0$$

теңдештигине ээ болобуз. λ_1 – мүнөздүк теңдемеге тамыр болгондуктан $\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 = 0$,

λ_1 –эки эселүү тамыр болгондуктан $2\lambda_1 + a_1 = 0$ ($\lambda_1 + \lambda_1 = -a_1$)

жана $e^{\lambda_1 t} \neq 0$ болорун эске алсак, акыркы теңдештиктен $\varphi(t)$ ны

$$\varphi'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = At + B$$

көрүнүштөгү функция деп эсептөөгө болору келип чыгат. Мындан А, В эркин турактууларын А = 1, В = 0 деп тандап, кошумча киргизилген $\varphi(t) = t$ функциясын жардамы менен, эки эселүү λ_1 тамырына туура келген экинчи сызыктуу көз каранды эмес жекече чыгарылышты

$x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ көрүнүштө тандоого болоруна ишенебиз.

Бул учурда $\frac{x_2(t)}{x_1(t)} = t \neq const.$ – орун алгандыктан,

$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ чечимдери өз ара сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшүп, чыгарылыштардын фундаменталдык системасы болушат. Ошондуктан (40^A) теңдемесин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda_1 t} (C_1 + C_2 t)$$

көрүнүштө жазылат.

$n = 2$ болгон учурдагы мүнөздүк теңдеменин 2 эселүү тамырына карата дифференциалдык теңдеменин жекече чыгарылыштарын тургузууну, жалпы көрүнүштөгү (40) теңдемесине жайылтып, λ_1 саны (42) мүнөздүк теңдемесине k эселүү тамыр болгон учурда

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = te^{\lambda_1 t}, \dots, x_k(t) = t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$$

функцияларын (40) теңдемесине сызыктуу көз каранды эмес жекече чыгарылыш болоруна ишенебиз.

Мисалы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ сандары мүнөздүк теңдемеге бир эселүү, ал эми λ_i саны m эселүү, λ_j саны k эселүү тамырлар болушсун. Демек, ар башка чыгарылыштары үчөө, ал эми эселүү чыгарылыштары $m + k$ санда болуп, бардык жекече чыгарылыштардын саны $3 + m + k = n$ болушу керек, анткени саны n ден ашыкча же жетпеген чыгарылыштардын системасы базистик системаны түзбөйт, б.а. сызыктуу көз каранды болот. Бул учурда чыгарылыштардын фундаменталдык системасы n сандагы

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_i t},$$

$e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_j t}, e^{\lambda_n t}$ көрүнүштөгү функциялардан турат. Алардын ар бири жекече чыгарылыш болорун тиешелүү туундуларын эсептеп, (40) теңдемеге коюп текшерүүгө болот. Ал эми **жалпы чыгарылыш**

$$\begin{aligned} z(t) = & C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_i t} + C_4 t e^{\lambda_i t} + C_5 t^2 e^{\lambda_i t} + \dots + \\ & + C_{m+1} t^{m-1} e^{\lambda_i t} + C_{m+2} e^{\lambda_j t} + C_{m+3} t e^{\lambda_j t} + C_{m+4} t^2 e^{\lambda_j t} + \dots + \\ & + C_{n-1} t^{k-1} e^{\lambda_j t} + C_n e^{\lambda_n t} \end{aligned} \quad (44^A)$$

көрүнүшүндө жазылат. Мында C_1, C_2, \dots, C_n эркин тандалган турактуу сандар.

Мисал

1) $z^{(IV)} + 2z^{(IV)} - z'' = 0$ теңдемени чыгаргыла.

► Бул дифференциалдык теңдеменин мүнөздөгүч теңдемесин түзүп

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 - \lambda^2 = 0,$$

анын тамырларын

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ таап, алардын ар бири эки эселүү тамырлар болорун көрөбүз. Анда (44^A) эрежесине окшоштуруп теңдеменин **жалпы чыгарылышын**

$$z(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 t e^{-t} + C_5 e^t + C_6 t e^t$$

көрүнүштөрдө жазабыз. Мында $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – каалагандай турактуу сандар. ◀

2) Мүнөздүк теңдеменин тамыры $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекстик сан болгон учур.

Айталы (40) дифференциалдык теңдемеге,

$$x(t) = u(t) + i v(t)$$

көрүнүштөгү комплекстик функция жекече чыгарылыш болсун дейли.

Бул учурда (40) теңдемени сызыктуу оператор көрүнүшүндө

$L[x(t)] = 0$ жазып, сызыктуулук касиетинен

$$\begin{aligned} L[x(t)] = 0 &\Leftrightarrow L[u(t) + i v(t)] = L[u(t)] + i L[v(t)] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L[u(t)] = 0, \\ L[v(t)] = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

шарттарына ээ болобуз. Бул шарттардан, комплекстик функциянын $u(t)$ – чыныгы жана $v(t)$ – жалган бөлүктөрүн сөзсүз түрдө (40) теңдемесине жекече чыгарылыштар болору келип чыгат.

Эгерде $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекстик саны (42) мүнөздүк теңдемесин чыгарылышы болсо, анда ага туура келген жекече чыгарылыш

$$\begin{aligned} x(t)_{\text{жек.}} &= e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \sin\beta t) = \\ &= e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t + i e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t \end{aligned}$$

көрүнүштөгү чыныгы жана жалган бөлүктөргө бөлүнөт. Анда (48) шартынан

$$\begin{cases} u(t) = e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t, \\ v(t) = e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t \end{cases}$$

чыныгы функциялардын экөөсүнүн тең (40) дифференциалдык теңдемесине жекече чыгарылыштар болору келип чыгат.

Эгерде $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекстик саны (42) мүнөздүк теңдеменин k эселүү тамыры болсо, анда бул комплекстик сандын түйүндөшү болгон

$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ комплекстик саны да (42) мүнөздүк теңдемеге k эселүү тамыр болот. Бул учурда, λ жана $\bar{\lambda}$ комплекстик сандарына (40) дифференциалдык теңдеменин $2k$ сандагы сызыктуу көз каранды эмес

$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, t^2 e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t;$

$e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, t^2 e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t;$

чыныгы чыгарылыштар туура келет.

Каралган учурларды эске алып, (42) мүнөздүк теңдеменин ар бир эселүү жана ар башка, чыныгы жана комплекстик тамырларына карата, (40) теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес жекече чыгарылыштарын тобун түзөбүз. Мындай жекече чыгарылыштардын бириккен жыйындысы, (40) теңдемесин чыгарылыштарын фундаменталдык системасы болот. Ал эми **жалпы чыгарылыш**, чыгарылыштардын фундаменталдык системасын сызыктуу комбинциясынан (44), (44^A) көрүнүштөрүндө куралат.

Дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын комплекстик формада калтырууга да болот.

Мисалдар

2) $z^{(IV)} + 2z^{(IV)} + z'' = 0$ теңдемени чыгаргыла.

► Бул дифференциалдык теңдеменин мүнөздөгүч теңдемесин түзүп

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0,$$

анын тамырларын

$$\lambda^2 (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$ таап, алардын ар бири эки эселүү тамырлар болорун көрөбүз. Анда (44^A) эрежесине окшоштуруп теңдеменин жалпы чыгарылышын

$$z(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-it} + C_4 t e^{-it} + C_5 e^{it} + C_6 t e^{it}$$

көрүнүштө жазабыз. Мында $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – каалагандай турактуу комплекстик сандар. ◀

3) $x''' - 8x = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

► Бул теңдеменин $\lambda^3 - 8 = 0$ мүнөздүк теңдемесинин тамырлары

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}, \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -1 + i\sqrt{3}$ болушат. Анда берилген теңдеменин жалпы чечими

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \cos \sqrt{3} t + C_3 e^{-t} \sin \sqrt{3} t$$

көрүнүштө жазылат. ◀

4) $x^{(VI)} + 2x^{(IV)} + x'' = 0$ теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Бул теңдеменин $\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесин тамырлары $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$ болушат жана ар бир тамыры эки эселүү тамыр болот. Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos t + C_4 t \cos t + C_5 \sin t + C_6 t \sin t$$

болот. ◀

5) Төмөндөгү

$x''' + 4x'' + 13x' = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2$ Кошинин маселесин чыгаргыла.

► Бул теңдеменин $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ мүнөздөгүч теңдемесин тамырлары $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 - 3i, \lambda_3 = -2 + 3i$ болот. Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} \cos 3t + C_3 e^{-2t} \sin 3t$$

көрүнүштө жазылат. Анын туундуларын эсептеп

$$x'(t) = (-2C_2 + 3C_3) e^{-2t} \cos 3t + (-2C_3 - 3C_2) e^{-2t} \sin 3t,$$

$$x''(t) = (-5C_2 - 12C_3) e^{-2t} \cos 3t + (12C_2 - 5C_3) e^{-2t} \sin 3t.$$

Кошинин шарттарын эске алсак

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$x'(0) = 1 \Leftrightarrow -C_2 + 3C_3 = 1,$$

$$x''(0) = 2 \Leftrightarrow -5C_2 - 12C_3 = 2,$$

анда C_1, C_2, C_3 белгисиздерин аныктоо үчүн төмөндөгүдөй

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -2C_2 + 3C_3 = 1, \\ -5C_2 - 12C_3 = 2 \end{cases}$$

система келип чыгат. Бул системаны Крамердин же Гауссун методу менен чыгарсак, анда

$$C_1 = \frac{6}{13}, C_2 = -\frac{6}{13}, C_3 = \frac{1}{39}$$

болот. Табылган турактууларды жалпы чыгарылышка коюп, берилген Кошинин маселесин чыгарылышы

$$x(t) = \frac{1}{13} (6 - 6e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t)$$

болоруна ынанабыз. ◀

б) $x'' + 2x' + 5x = 0$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Мүнөздүк теңдемесин $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ жазып, анын

$\lambda_1 = -1 + i2, \lambda_2 = -1 - i2$ тамырларын табабыз. Анда жалпы чыгарылыш

$x(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t$ көрүнүштө жазылат. ◀

7. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү бир тектүү теңдемелердин жалпы чыгарылышын тапкыла (37 – 56):

$$37. x'' - 4x' = 0,$$

$$38. 2x'' - 3x' = 0,$$

$$39. x'' + 3x' - 10x = 0,$$

$$40. 2x'' - 7x' + 3x = 0,$$

$$41. x'' + 6x' + 9x = 0,$$

$$42. x'' + 5x' + 5x = 0,$$

$$43. 4x'' - 12x' + 9x = 0,$$

$$44. x'' - 6x' + 13x = 0,$$

$$45. x'' + 8x' + 25x = 0,$$

$$46. 5y^{(IV)} + 3y''' = 0,$$

$$47. y^{(IV)} - 8y''' + 16y'' = 0,$$

$$48. y^{(IV)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0,$$

$$49. 9y''' + 12y'' + 4y' = 0,$$

$$50. y^{(IV)} + 3y'' - 4y = 0,$$

$$51. y^{(IV)} - 8y'' + 16y = 0,$$

$$52. y^{(IV)} + 18y'' + 81y = 0,$$

$$53. 6y^{(IV)} + 11y'' + 4y = 0,$$

$$54. y^{(IV)} = 16y.$$

$$55. y''' + y'' - y' - y = 0,$$

$$56. y^{(IV)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Төмөндөгү Кошинин маселесин чыгаргыла (57 – 63):

$$57. y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 11;$$

$$58. 9y'' + 6y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4;$$

$$59. y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1;$$

$$60. 2y''' - 3y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3;$$

$$61. 3y''' + 2y'' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

$$62. y''' + 10y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 5;$$

$$63. y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

§ 18.5 Жогорку тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелер. Турактууну вариациялоо ыкмасы

18.5.1 n – тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышын түзүлүшү

(a, b) интервалында аныкталган $x(t)$ белгисиз функциясына карата

$$L[x] \equiv a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = g(t), \quad (49)$$

түзүлгөн n – тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес (49) дифференциалдык теңдемеси берилсин.

Мында $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t), g(t) \in C(a, b)$, б.а (a, b) интервалындагы белгилүү үзгүлтүксүз функциялар, $a_0(t) \neq 0, t \in (a, b)$.

(49) теңдемесин берилген аралыкта нөлдөн айырмалуу $a_0(t)$ функциясына бөлүп жиберип, ага тең күчтүү болгон

$$\mathbb{L}[x] \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = f(t), \quad t \in (a, b) \quad (50)$$

көрүнүштө кайра жазабыз. Мында

$$p_i(t) = \frac{a_i(t)}{a_0(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad f(t) = \frac{g(t)}{a_0(t)}.$$

(50) теңдеменин сол жагына $x(t)$ функциясын туундуларына карата түзүлгөн

$$\mathbb{L}[x] = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} + p_1(t) \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t) \frac{\partial}{\partial t} + p_n(t) \right) \cdot x$$

оператордук белгилөө киргизип, теңдемени

$$\mathbb{L}[x] = f(t) \quad (50^A)$$

көрүнүштө жазууга да болот. Туунду алуунун сызыктуулук касиетинен,

$$\mathbb{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha \mathbb{L}[x_1(t)] + \beta \mathbb{L}[x_2(t)], \quad \alpha, \beta \in R$$

оператордун да сызыктуу болору келип чыгат. Мындан $x_1(t)$ функциясы

$$\mathbb{L}[x] = f_1(t)$$

теңдемесине чыгарылыш болсо, ал эми $x_2(t)$ функциясы

$$\mathbb{L}[x] = f_2(t)$$

теңдемесине чыгарылыш болсо, анда алардын $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ сызыктуу комбинациясы

$$\mathbb{L}[x] = f_1(t) + f_2(t)$$

теңдемесине чыгарылыш болору келип чыгат.

Демек, (50) теңдемесин оң жагы $f(t) = U(t) + i V(t)$ көрүнүштөгү комплекстик функция болуп,

$$\mathbb{L}[x] = U(t) + i V(t) \text{ теңдемеси}$$

$x(t) = u(t) + i v(t)$ көрүнүштөгү чыгарылышка ээ болсо, анда

$$\mathbb{L}[x] = \mathbb{L}[u(t) + i v(t)] \equiv \mathbb{L}[u(t)] + i \mathbb{L}[v(t)] \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{L}[u(t)] \equiv U(t), \\ \mathbb{L}[v(t)] \equiv V(t) \end{cases}$$

теңдештиктери орун алып, $u(t)$ функциясы $\mathbb{L}[u(t)] = U(t)$ теңдемесине, ал эми $v(t)$ функциясы $\mathbb{L}[v(t)] = V(t)$ теңдемесине

чыгарылыш болорун көрөбүз. Мында $f_1(t)$, $f_2(t)$, $U(t)$, $V(t)$, $u(t)$, $v(t)$ функциялары (a, b) интервалында аныкталган чыныгы функциялар.

Айталы, (50) теңдемесин оң жагы $f(t) = 0$ болсун, анда n – тартиптеги бир тектүү сызыктуу

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0 \quad (51)$$

дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз.

18.5 Теорема. Эгерде $\tilde{x}(t)$ – функциясы бир тектүү эмес (50) теңдемесинин, ал эми $x(t)_{\text{б.т.}}$ – функциясы (51) бир тектүү бөлүгүнүн кайсы бир жекече чыгарылыштары болушса, анда алардын суммасы болгон

$x(t) = \tilde{x}(t) + x(t)_{\text{б.т.}}$ функциясы, бир тектүү эмес (50) теңдемесине чыгарылыш болот.

► Чынында эле, \mathbb{L} оператор сызыктуу болгондуктан

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[x] &= \mathbb{L}[\tilde{x}(t) + x(t)_{\text{б.т.}}] = \mathbb{L}[\tilde{x}(t)] + \mathbb{L}[x(t)_{\text{б.т.}}] = \\ &= f(t) + 0 = f(t) \end{aligned}$$

теңдештиги орун алып, теореманын кортундусун туура экендиги далилденет. ◀

18.6 Теорема. Эгерде

$$\mathbb{L}[x] \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = f(t), \quad t \in (a, b)$$

берилген (50) теңдемесинде

1) $p_i(t)$ – коэффициенттери ($i = 1, 2, \dots, n$) жана $f(t)$ – оң жагы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушса;

2) $x(t)_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \dots + C_nx_n(t)$ – функциясы (51) бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы, ал эми $\tilde{x}(t)$ – функциясы бир тектүү эмес (50) теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышы болсо.

Анда, бир тектүү эмес (50) теңдеменин кайсы бир $\tilde{x}(t)$ – жекече чыгарылышы менен бир тектүү (51) теңдеменин $x(t)_{\text{б.т.ж.ч.}}$ – жалпы чыгарылышын суммасы

$$x(t)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{x}(t) + C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \dots + C_nx_n(t) \quad (52)$$

бир тектүү эмес (50) теңдемесине жалпы чыгарылыш болот жана $x(t)_{\text{ж.ч.}}$ – жалпы чыгарылышын k – тартипке

чейинки туундулары $|(x(t)_{\text{ж.ч.}})^{(k)}| < +\infty$ чектелген функциялар болушат ($a < t < b$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$).

► (52) нин чыгарылыш болору 18.5 – теоремадан келип чыгат, ал эми анын жалпы чыгарылыш болорун $n = 3$ болгон учур үчүн көрсөтөлү. Ал үчүн

C_1, C_2, C_3 турактууларын тандоо менен

$$x''' + p_1(t)x'' + p_2(t)x' + p_3(t)x = f(t), \quad t \in (a, b)$$

теңдемесин $\forall t_0 \in (a, b)$ чекитинде

Кошинин $x(t)_{\text{ж.ч.}}|_{t=t_0} = x_0$, $(x(t)_{\text{ж.ч.}})'|_{t=t_0} = x'_0$, $(x(t)_{\text{ж.ч.}})''|_{t=t_0} = x''_0$ баштапкы шарттарын канааттандырган бир маанилүү жалпы

$$x(t)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{x}(t) + C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t) \quad (52^A)$$

чыгарылышын табууга болорун көрсөтүү жетиштүү. Мында

$x(t)_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)$ функциясы,

$$x'''' + p_1(t) x'' + p_2(t) x' + p_3(t) x = 0 \quad (51^A)$$

бир тектүү теңдеменин чечимдерин фундаменталдык системасы аркылуу туюнтулган жалпы чыгарылыш.

Чынында эле $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ функциялары (51^A) теңдемесин чыгарылыштарын фундаменталдык системасы болгондуктан, алардын Вронскианы $\forall t_0 \in (a, b)$ чекиттеринде

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & x_3(t_0) \\ x'_1(t_0) & x'_2(t_0) & x'_3(t_0) \\ x''_1(t_0) & x''_2(t_0) & x''_3(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

нөлдөн айырмалуу болушат. Ошондуктан x_0, x'_0, x''_0 сандары кандай болгонуна карабастан, Кошинин баштапкы шарттарынан келип чыккан үч белгисиздүү

$$\begin{cases} C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + C_3 x_3(t_0) = x_0, \\ C_1 x'_1(t_0) + C_2 x'_2(t_0) + C_3 x'_3(t_0) = x'_0, \\ C_1 x''_1(t_0) + C_2 x''_2(t_0) + C_3 x''_3(t_0) = x''_0 \end{cases}$$

үч алгебралык теңдемелер системасынан C_1, C_2, C_3 белгисиздерин бир маанилүү C_1^0, C_2^0, C_3^0 көрүнүштө аныктоого болот.

Демек, ар бир Кошинин баштапкы шарттарына жараша, аны канааттандырган

$$x(t)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{x}(t) + C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + C_3^0 x_3(t)$$

чечиминен башка чыгарылыш болбогондуктан, аны **жалгыз жалпы чыгарылыш** деп эсептейбиз. ◀

Ошентип, n – тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес (50) теңдемесин жалпы чыгарылышы, анын кайсы бир $\tilde{x}(t)$ – жекече чыгарылышына, (50) теңдемесин бир тектүү бөлүгү болгон (51) теңдемесинин жалпы чыгарылышын кошуп коюу менен аныкталат.

18.5.2 Турактууну вариациялоо ыкмасы

Бир тектүү эмес (50) теңдемесинин чыгарылышын турактууну вариациялоо ыкмасы менен табууга болот. Ал үчүн оболу, анын бир тектүү

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)x' + p_n(t)x = 0 \quad (51)$$

бөлүгүнүн чыгарылыштарын $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ фундаменталдык системасын тургузуп, (51) бир тектүү теңдемесин жалпы чыгарылышын

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

жазып алабыз. Мындан турактууларды t өзгөрүлмөсүнө карата

$$C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$$

функциялары менен алмаштырып (турактууну вариациялап),

(50) бир тектүү эмес теңдемесин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{x}(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \dots + C_n(t)x_n(t) \quad (53)$$

көрүнүштө издейбиз. Мында $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$

белгисиз функциялар.

$n = 2$ болгон учурда 2 – тартиптеги бир тектүү эмес

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = f(t), \quad t \in (a, b) \quad (54)$$

сызыктуу дифференциалдык теңдемесин

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0 \quad (55)$$

бир тектүү бөлүгүн **жалпы чыгарылышы:** $x_1(t), x_2(t)$ жекече чыгарылыштары (фундаменталдык система) аркылуу

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \text{ көрүнүштө туюнтулат.}$$

C_1 , C_2 турактууларын $C_1(t)$, $C_2(t)$ белгисиз функциялары (вариацияланган) катарында түшүнүп, (54) бир тектүү эмес теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{x}(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) \quad (56)$$

көрүнүштө издейли.

(56) нын туундусун эсептеп

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= (C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t))' = C_1'(t)x_1(t) + C_1(t)x_1'(t) + \\ &+ C_2'(t)x_2(t) + C_2(t)x_2'(t), \end{aligned}$$

белгисиз $C_1(t)$, $C_2(t)$ функцияларына жардамчы

$$\boxed{C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) = 0} \quad (57)$$

шартын койсок, анда туундусу

$\tilde{x}'(t) = C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t)$ көрүнүшкө келет. Мындан экинчи тартиптеги туундусун

$$\begin{aligned} \tilde{x}''(t) &= (C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t))' = \\ &= C_1'(t)x_1'(t) + C_1(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2'(t) + C_2(t)x_2''(t) \text{ таап,} \end{aligned}$$

$\tilde{x}(t)$, $\tilde{x}'(t)$, $\tilde{x}''(t)$ маанилерин (57) ни эске алуу менен (54) теңдемесине коюп топтоштурсак,

$$\begin{aligned} C_1(t)[x_1'' + p_1(t)x_1' + p_2(t)x_1] + C_2(t)[x_2'' + p_1(t)x_2' + p_2(t)x_2] + \\ + C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{aligned}$$

теңдештиги келип чыгат.

$x_1(t)$, $x_2(t)$ функциялары бир тектүү (55) теңдеменин жекече чыгарылыштары болгондуктан, акыркы теңдештиктеги кашаанын ичиндеги туюнтаңмалар нөлгө тең болуп, теңдештик

$$C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) = f(t) \quad (58)$$

көрүнүшкө өзгөрөт.

Ошентип, (57) жардамчы шартын жана (58) теңдештигин канааттандырган $C_1(t)$, $C_2(t)$ белгисиз функцияларын аныктоого мүмкүнчүлүк берген сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасына

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) = 0, \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) = f(t) \end{cases} \quad (59)$$

ээ болобуз.

$x_1(t)$, $x_2(t)$ функциялары бир тектүү (55) теңдеменин чыгарылыштарын сызыктуу көз каранды эмес системасын түзгөндүктөн, алардын Вронскианы

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0,$$

нөлдөн айырмалуу же (59) теңдемелер системасын матрицасы кубулбаган болот.

Демек, (59) теңдемелер системасын $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ белгисиздерине карата бир маанилүү $C_1'(t) = \varphi_1(t)$, $C_2'(t) = \varphi_2(t)$ чечимдери табылат. Мындан

$$C_1(t) = \int \varphi_1(t) dt + c_1, \quad C_2(t) = \int \varphi_2(t) dt + c_2$$

белгисиз функцияларын таап (56) га койсок, бир тектүү эмес (54) теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{x}(t) = [\int \varphi_1(t) dt + c_1] x_1(t) + [\int \varphi_2(t) dt + c_2] x_2(t)$$

көрүнүштө табабыз. Анда бир тектүү эмес (54) теңдеменин **жалпы чыгарылышын**

$$x(t)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{x}(t) + x(t)_{\text{б.т.ж.ч.}} = x_1(t) \int \varphi_1(t) dt + x_2(t) \int \varphi_2(t) dt + C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (60)$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Мында C_1 , C_2 , эркин тандалуучу турактуу сандар, ал эми c_1 , c_2 интегралдоонун турактуулары болуп, (60) жазылышта алар нөл деп алынды.

Жалпы учурда n – тартиптеги бир тектүү эмес (50) теңдемесин

бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышын вариация методу менен чыгаргыла.

► Берилген бир тектүү эмес теңдеменин бир тектүү

$$y'' + y = 0$$

бөлүгүн мүнөздүк $\lambda^2 + 1 = 0$ теңдемеси $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ тамырларына ээ болуп, чыгарылыштарын фундаменталдык системасы

$$y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$$

функциялары болот. Анда берилген теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

түрүндө издейбиз. Мында $C_1(x)$, $C_2(x)$ – белгисиз функциялар. Бул учурда (59) система

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \tan x \end{cases}$$

түрүндө жазылат. Бул системаны Крамердин методу менен чыгаралы:

$$\Delta(x) = W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x},$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \cos x \tan x = \sin x.$$

$$\text{Демек } C_1'(x) = \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} = \cos x - \frac{1}{\cos x} = \varphi_1(x),$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} = \sin x = \varphi_2(x).$$

Анда

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + c_1 = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx + c_1 =$$

$$= \sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| + c_1,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + c_2 = \int \sin x dx + c_2 = -\cos x + c_2.$$

Демек, берилген бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left[\sin x - \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \right| \right] \cos x - \cos x \sin x$$

болот. Мында c_1 , c_2 – интегралдоо турактуулары, C_1 , C_2 – эркин тандалуучу турактуу сандар. ◀

2) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү $y'' + y = 0$ бөлүгүнүн

мүнөздүк $\lambda^2 + 1 = 0$ теңдемеси $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ тамырларына ээ болуп, $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ функциялары бир тектүү бөлүктүн чечимдерин фундаменталдык системасын түзөт. Анда бир тектүү бөлүктүн жалпы чыгарылышы

$$y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

көрүнүштө жазылат.

Берилген бир тектүү эмес теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын,

$$\tilde{y}(x) = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

көрүнүштө издейбиз. $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ белгисиздерине карата

$$\begin{cases} C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = 0, \\ C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

алгебралык теңдемелер системасын түзөлү. Анын матрицасы

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

кубулбаган, ошондуктан бир маанилүү $C_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $C_2'(x) = -1$ чыгарылыштарга ээ. Мындан

$$C_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + c_1 = \ln|\sin x| + c_1,$$

$$C_2(x) = \int (-1) dx + c_2 = -x + c_2$$

таап,

$$\tilde{y}(x) = (\ln|\sin x| + c_1)\sin x + (-x + c_2)\cos x$$

жекече чыгарылышын аныктайбыз.

Анда берилген бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$\begin{aligned} y(x)_{\text{ж.ч.}} &= \tilde{y}(x) + y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}} = \\ &= \sin x \ln|\sin x| - x\cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{aligned}$$

функциясы болот. Мында $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ интегралдоо турактуулары, C_1 , C_2 эркин тандалуучу турактуулар. ◀

§18.6 Оң жагы көп мүчө болгон бир тектүү эмес турактуу коэффициенттүү жогорку тартиптеги сызыктуу теңдемелер

18.6.1 Оң жагы $F_m(x)$ көрүнүштөгү көп мүчө болгон учур

Жогоруда бир тектүү эмес жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемени турактууну вариациялоо ыкмасы менен чыгаруу усулун карадык. Бирок, (50) бир тектүү эмес теңдеменин $f(t)$ – оң жагынын түзүлүшүнө жараша, бир тектүү эмес теңдеменин кандайдыр бир жекече чыгарылышын тандоо жолу менен тургузуу жеңилерээк болот.

Айталы, $y(x)$ – белгисиз функциясына карата, n – тартиптеги турактуу коэффициенттүү бир тектүү эмес, оң жагы $f(t) = F_m(x)$ – көп мүчө болгон

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = F_m(x) \quad (62)$$

дифференциалдык теңдемеси берилсин. Мында

$F_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$ көрүнүштөгү m – даражадагы белгилүү көп мүчө, $x \in (a, b)$; p_i, A_j – белгилүү турактуу сандар ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$).

(62) теңдеменин бир тектүү

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (63)$$

бөлүгүн мүнөздүк

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0 \quad (64)$$

теңдемесин тамырларына жараша төмөндөгү учурларды карайбыз:

1). $p_n \neq 0$ болсо, б.а. мүнөздүк теңдеме $\lambda = 0$ нөлдүк чечимине ээ болбосо, анда (62) бир тектүү эмес теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m = Q_m(x)$$

m – даражадагы көп мүчө көрүнүшүндө издөөгө болот. Мында B_j – анык эмес коэффициенттер ($j = 0, 1, \dots, m$).

Жекече чыгарылыш деп болжолдонгон $\tilde{y}(x)$ – көп мүчө функциясын жана анын тиешелүү туундуларын (62) теңдемеге коюп, теңдеменин оң жагы менен сол жагын x тин бирдей даражаларына карата теңдештирсек, белгисиздери B_j – коэффициенттери болгон m белгисиздүү, m алгебралык теңдемелердин системасын түзө алабыз. Теңдемелер системасынан

$$x^m \text{ даражасына карата теңдештиргенде: } p_n B_0 = A_0 \Leftrightarrow B_0 = \frac{A_0}{p_n},$$

$$x^{m-1} \text{ даражасына карата: } m p_{n-1} B_0 + p_n B_1 = A_1 \Leftrightarrow B_1 = \frac{A_1 - m p_{n-1} B_0}{p_n},$$

ж. б. у. с.

B_j – коэффициенттерин аныктап ($j = 0, 1, \dots, m$), бир тектүү эмес (62) теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын болжолдонгон $\tilde{y}(x)$ көрүнүшүндө кура алабыз. Бул ыкма **анык эмес коэффициенттер усулу** деп аталат.

Ошентип, бул учурда бир тектүү эмес (62) теңдеменин **жалпы чыгарылышы**, анын кайсы бир $\tilde{y}(x)$ – жекече чыгарылышы менен, (63) бир тектүү бөлүгүн $y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}}$ – жалпы чыгарылышын суммасы

$$y(x)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{y}(x) + y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}}$$

катары аныкталат.

2). Айталы $p_n = 0$ болсун, же жалпылык үчүн r – сандагы $p_n = p_{n-1} = \dots = p_{n-(r-1)} = 0$ коэффициенттери нөлгө тең болуп, r ден кийинки номердеги коэффициенти $p_{n-r} \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болсун дейли. Мындан $\lambda = 0$ саны бир тектүү теңдеменин мүнөздүк $\varphi(\lambda) = 0$, (64) теңдемесине r эселүү ($r \geq 1$) тамыр болгондуктан, бир тектүү эмес (62) теңдемени

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-(r-1)} y^{(r-1)} + p_{n-r} y^{(r)} = F_m(x) \quad (65)$$

көрүнүшкө теңдеш өзгөртүүгө болору келип чыгат. Анда

$y^{(r)}(x) = z(x)$ белгилөөсүн киргизип, (65) теңдемени кайра

$$z^{(n-r)} + p_1 z^{(n-1-r)} + \dots + p_{n-(r-1)} z' + p_{n-r} z = F_m(x) \quad (65^A)$$

жазсак, анда 1) – учурда анык эмес коэффициенттер усулунда көрсөтүлгөндөй, (65^A) теңдемесин кайсы бир

$$\tilde{z}(x) = \tilde{y}^{(r)}(x) = \tilde{B}_0 x^m + \tilde{B}_1 x^{m-1} + \dots + \tilde{B}_{m-1} x + \tilde{B}_m$$

көрүнүштөгү жекече чыгарылышын табууга болот.

Демек, 2) – учурда бир тектүү эмес (62) теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын $(m + r)$ даражалуу

$$\tilde{y}(x) = x^r (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m) = x^r Q_m(x) \quad (66)$$

көп мүчө көрүнүштө издөөгө болот. Анткени, көп мүчөдө x тин $r - 1$ ден баштап төмөн даражалары каалагандай турактуу коэффициенттерге ээ боло алат, б.а. аларды нөл деп алуу жалпылыкты бузбайт.

Мисал

1) $y'' + y' = 2x + 1$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү $y'' + y' = 0$ бөлүгүн мүнөздүк $\lambda^2 + \lambda = 0$ теңдемеси $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ тамырларына ээ болгондуктан, бир тектүү бөлүгүн жалпы чыгарылышы

$$y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

көрүнүштө табылат.

$\lambda = 0$ саны мүнөздүк теңдеменин бир эселүү тамыры болгондуктан, (66) боюнча анын жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = x (B_0x + B_1)$$

көрүнүштө издөөгө болот. Анда

$[x(B_0x + B_1)]'' + [x(B_0x + B_1)]' = 2x + 1$ теңдештиги орун алышы керек. Мындан

$$[x'(B_0x + B_1) + x(B_0x + B_1)']' + x'(B_0x + B_1) + x(B_0x + B_1)' = 2x + 1,$$

$$2B_0x + 2B_0 + B_1 = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2B_0 = 2, \\ 2B_0 + B_1 = 1 \end{cases}$$

алгебралык теңдемелер системасына ээ болуп, анык эмес коэффициенттердин $B_0 = 1$, $B_1 = -1$ сандык маанилерин табабыз. Демек, бир тектүү эмес дифференциалдык теңдеме

$$\tilde{y}(x) = x(x - 1) = x^2 - x \text{ жекече чыгарылышына ээ болот.}$$

Анда берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x)_{\text{ж.ч.}} = \tilde{y}(x) + y(x)_{\text{б.т.ж.ч.}} = x^2 - x + C_1 + C_2 e^{-x}$$

функциясы болот. Мында C_1 , C_2 эркин тандалуучу турактуу сандар. ◀

18.6.2 Оң жагы квази көп мүчө болгон учур

$y(x)$ белгисиз функциясына карата түзүлгөн

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = e^{\alpha x} \cdot F_m(x) \quad (67)$$

бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемеси берилсин. Мында α , p_1 , p_2 , ..., p_n белгилүү турактуу сандар, $e^{\alpha x} \cdot F_m(x)$ – белгилүү квази көп мүчө, $x \in (c, d) \subset \mathbb{R}$.

Бул учурда (67) бир тектүү эмес теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} z(x)$$

көрүнүштө издейбиз. $\tilde{y}(x)$ ти (67) теңдемеге коюп,

$$\mathbb{L}[e^{\alpha x} z(x)] = e^{\alpha x} \cdot F_m(x) \quad (68)$$

теңдештигинен кошумча киргизилген белгисиз $z(x)$ функциясын аныктайбыз. Мында \mathbb{L} , (67) теңдеменин сол жагынын оператордук

$$\mathbb{L}[y] = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} + p_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial}{\partial x} + p_n \right) \cdot y$$

белгилениши.

$$\text{Анда } \tilde{y}(x) = e^{\alpha x} z(x),$$

$$\tilde{y}' = e^{\alpha x} (\alpha z + z'),$$

$$\tilde{y}'' = e^{\alpha x} (\alpha^2 z + 2\alpha z' + z''),$$

.....

$$\tilde{y}^{(r)} = e^{\alpha x} \left(\alpha^r z + \frac{r}{1!} \alpha^{r-1} z' + \frac{r(r-1)}{2!} \alpha^{r-2} z'' + \dots + z^{(r)} \right),$$

.....

$$\tilde{y}^{(n)} = e^{\alpha x} \left(\alpha^n z + n \alpha^{n-1} z' + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^{n-2} z'' + \dots + z^{(n)} \right)$$

маанилерин эсептеп, $p_n, p_{n-1}, \dots, p_r, \dots, p_n$ сандарына тиешелүү түрдө

$\tilde{y}', \tilde{y}'', \dots, \tilde{y}^{(r)}, \dots, \tilde{y}^{(n)}$ функцияларын көбөйтүп суммаласак,

$$\mathbb{L}[e^{\alpha x} z(x)] = e^{\alpha x} \cdot \left\{ \varphi(\alpha) z + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!} z' + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!} z'' + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(\alpha)}{r!} z^{(r)} + \dots + z^{(n)} \right\}$$

туюнтулушуна ээ болобуз. Мында $\varphi(\alpha)$ саны, (64) мүнөздүк теңдеменин сол жагындагы $\varphi(\lambda)$ көп мүчөсүн $\lambda = \alpha$ чекитиндеги мааниси ж.б.у.с.

$$\varphi'_\lambda|_{\lambda=\alpha} = \varphi'(\alpha), \varphi''_\lambda|_{\lambda=\alpha} = \varphi''(\alpha), \dots, \varphi_\lambda^{(r)}|_{\lambda=\alpha} = \varphi^{(r)}(\alpha), \dots$$

Туюнтулуштагы $\mathbb{L}[e^{\alpha x} z(x)]$ тин маанисин (68) ге коюп, келип чыккан теңдештиктин эки жагын тең $e^{\alpha x}$ ке бөлүп жибергенден кийин, (68) теңдештигин аткарылышын камсыз кылган $z(x)$ ти аныктоочу

$$z^{(n)} + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(a)}{r!} z^{(r)} + \dots + \varphi'(a) z' + \varphi(a) z = F_m(x), \quad (69)$$

турактуу коэффициенттүү бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемесин келтирип чыгарабыз. Теңдеменин $F_m(x)$ оң жагы 18.6.1 – темасында каралган жөнөкөй көп мүчө болгондуктан, $\varphi(a) \neq 0$, б.а. a – саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздүк теңдемесине чыгарылыш болбосо, анда анык эмес коэффициенттер усулу менен (69) дун жекече чыгарылышын

$$z_{\text{жек}}(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_{m-1} x + B_m = Q_m(x)$$

m – даражадагы сызыктуу көп мүчө көрүнүшүндө табууга болот.

Бул учурда, бир тектүү эмес (67) теңдеменин кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} \cdot z_{\text{жек}}(x) = e^{ax} \cdot Q_m(x)$$

көрүнүштө издейбиз.

Эгерде a саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздүк теңдемесине r эселүү ($r \geq 1$) чыгарылыш болсо, анда

$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \dots = \varphi^{(r-1)}(a) = 0$, $\varphi^{(r)}(a) \neq 0$ болуп, (69) дун жекече чыгарылышын $z_{\text{жек}}(x) = x^r Q_m(x)$ көрүнүшүндө таап, берилген бир тектүү эмес (67) теңдеменин бир жекече чыгарылышы

$$\tilde{y}(x) = e^{ax} \cdot x^r Q_m(x)$$

көрүнүштө изделет.

Мисалдар

2) $y'' + y' = 2e^x$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү $y'' + y' = 0$ бөлүгүн мүнөздүк $\lambda^2 + \lambda = 0$ теңдемесин тамырлары $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ сандары болуп, жалпы чыгарылыш

$$y_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

функциясы болот.

Берилген бир тектүү эмес теңдеменин оң жагы $m = 0$ даражалуу $e^{ax} \cdot F_m(x) = e^x \cdot 2$, $a = 1$ квази көп мүчө болуп, $a = 1$ саны мүнөздүк теңдемеге чечим болбогондуктан, бир жекече чыгарылышты

$$\tilde{y}(x) = e^x \cdot B$$

көрүнүштө издеп, берилген теңдемеге койсок

$$(e^x \cdot B)'' + (e^x \cdot B)' = 2e^x \Leftrightarrow e^x \cdot B + e^x \cdot B = 2e^x$$

келип чыгып, акыркынын эки жагын тең e^x ке бөлүп жиберген соң

$$2B = 2 \Leftrightarrow B = 1 \text{ коэффициентин табабыз. Анда жекече чыгарылыш}$$

$$\tilde{y}(x) = e^x \cdot B \Leftrightarrow \tilde{y}(x) = e^x \text{ функциясы болот.}$$

Демек, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$y_{\text{ж.ч.}} = \tilde{y}(x) + y_{\text{б.т.ж.ч.}} = e^x + C_1 + C_2 e^{-x}$ функциясы болот. Мында C_1 , C_2 эркин тандалуучу турактуулар. ◀

3) $y'' - 2y' + y = xe^x$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү бөлүгүнүн мүнөздүк

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

теңдемеси $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ эселүү тамырларына ээ болгондуктан, бир тектүү бөлүктүн жалпы чыгарылышы

$$y_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 e^x + C_2 x e^x \text{ көрүнүштө табылат.}$$

Бир тектүү эмес теңдеменин оң жагы $m = 1$ даражалуу

$e^{ax} F_m(x) = x e^x$ квази көп мүчө, ал эми $a = 1$ саны мүнөздүк теңдеменин $r = 2$ эселүү чечими, ошондуктан берилген бир тектүү эмес теңдеменин бир жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = x^2 e^x \cdot (B_0 x + B_1)$$

көрүнүштө издөөгө болот. Берилген теңдемеге болжолдонгон чыгарылыштын өзүн жана тиешелүү

$$\tilde{y}'(x) = [x^2 e^x \cdot (B_0 x + B_1)]' = 2x e^x (B_0 x + B_1) + x^2 e^x \cdot (B_0 x + B_1) +$$

$$+x^2 e^x \cdot B_0 = x^3 e^x B_0 + x^2 e^x B_1 + x^2 e^x \cdot B_0 + 2x^2 e^x \cdot B_0 + 2x e^x B_1 =$$

$$= e^x [(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1],$$

$$\tilde{y}''(x) = \{e^x [(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1]\}' =$$

$$= e^x [(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1] + e^x [(3x^2 + 6x)B_0 + (2x + 2)B_1]$$

туундуларын коюп

$$e^x [(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1] + e^x [(3x^2 + 6x)B_0 + (2x + 2)B_1] -$$

$$- 2e^x [(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1] + x^2 e^x \cdot (B_0 x + B_1) = x e^x,$$

эки жагын тең e^x ке бөлүп

$$(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1 + (3x^2 + 6x)B_0 + (2x + 2)B_1 -$$

$$- 2[(x^3 + 3x^2)B_0 + (x^2 + 2x)B_1] + x^2 \cdot (B_0 x + B_1) = x,$$

топтоштургандан кийин

$$6B_0 x + 2B_1 = x$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан x тин бирдей даражаларына карата теңдештирип,

$$\begin{cases} B_1 = 0, \\ 6B_0 = 1 \end{cases}$$

алгебралык теңдемелер системасынан анык эмес $B_1 = 0, B_0 = \frac{1}{6}$ коэффициенттерин табабыз. Анда болжолдонгон жекече чыгарылыш

$$\tilde{y}(x) = x^2 e^x \cdot (B_0 x + B_1) = \frac{1}{6} x^2 e^x$$

көрүнүштөгү функция болуп, бир тектүү эмес теңдеменин талап кылынган жалпы чыгарылышы

$$y_{\text{ж.ч.}} = \tilde{y}(x) + y_{\text{б.т.ж.ч.}} = e^x \left(\frac{1}{6} x^2 + C_2 x + C_1 \right)$$

табылат. Мында C_1, C_2 эркин тандалуучу турактуулар. ◀

18.6.3 Оң жагы айрым көрүнүштөгү комплекстик функция болгон учур

Айталы, бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad (70)$$

теңдемесин

оң

жагы

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x] \quad (71)$$

көрүнүштөгү функция болсун. Мында $x \in (c, d) \subset \mathbb{R}$, ал эми $P_m(x)$, $Q_s(x)$ тиешелүү түрдө m , s даражалуу көп мүчөлөр.

Бул учурда, тригонометриялык функцияларды Эйлердин

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

формуларын жардамы менен көрсөткүчтүү формада жазабыз. Анда (71) ди

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x} \left[P_m(x) \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q_s(x) \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right] = \\ &= e^{(\alpha+i\beta)x} \left[\frac{1}{2} P_m(x) + \frac{1}{2i} Q_s(x) \right] + e^{(\alpha-i\beta)x} \left[\frac{1}{2} P_m(x) - \frac{1}{2i} Q_s(x) \right] \end{aligned}$$

көрүнүшкө өзгөртүп жазууга болот. Бул жерде, квадраттык кашаалардын ичинде $P_m(x)$, $Q_s(x)$ көп мүчөлөрүн кошуп жазгандан кийин, коэффициенттери турактуу комплекстик сандар болгон

$\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k$ даражалуу көп мүчөлөр турат. Аларды тиешелүү түрдө

$M(x)$ жана $N(x)$ деп белгилеп, (70) теңдеменин оң жагын

$$M(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + N(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (72)$$

көрүнүшкө келтиребиз.

Эгерде $\alpha \pm i\beta$ саны мүнөздүк $\varphi(\lambda) = 0$ теңдеменин тамыры болбосо, анда (72) деги кошулуучулардын ар бирине 18.6.2 – де баяндалган

усулду колдонуп, (70) бир тектүү эмес теңдеменин $\tilde{y}(x)$ жекече чыгарылышын

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x) \quad (73)$$

көрүнүштө издөөгө болот.

Ал эми $\alpha \pm i\beta$ саны мүнөздүк $\varphi(\lambda) = 0$ теңдемеге r эселүү ($r \geq 1$) тамыр болсо, анда жекече чыгарылыш

$$\tilde{y}(x) = x^r e^{\alpha x} (\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x) \quad (74)$$

көрүнүшүндө изделет. Мында $\tilde{P}_k(x)$, $\tilde{Q}_k(x)$ анык эмес коэффициенттүү $\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k$ даражалуу көп мүчөлөр.

Эки учурда тең болжолдуу алынган жекече чыгарылыштарын жана алардын тиешелүү туундуларын (70) бир тектүү теңдемеге коюп, келип чыккан теңдештиктин коэффициенттерин x тин бирдей даражаларына карата, $\cos \beta x$ менен $\sin \beta x$ ти кармап турганын жараша өз – өзүнчө теңдештирип, түзүлгөн алгебралык теңдемелер системасынан анык эмес коэффициенттерди таап, изделген көрүнүштөгү жекече чыгарылышты тургузабыз.

Мисал

4) $y'' + 2y' + y = \cos x$ теңдемесин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү бөлүгүн мүнөздүк

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

теңдемеси $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ эселүү тамырларына ээ болуп, дифференциалдык теңдеменин бир тектүү бөлүгү

$$y_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 e^{-x} + x C_2 e^{-x}$$

жалпы чыгарылышына ээ болот.

Бул учурда $\alpha = 0$, $\beta = -1$ болуп, $\alpha \pm i\beta = \pm i$ саны мүнөздүк теңдемеге чыгарылыш болбойт. Ал эми $P_m(x) \equiv 1$, $Q_s(x) \equiv 0$ көрүнүштөгү көп мүчөлөр болушат. Демек, жекече чыгарылышты

$$\tilde{y}(x) = A \cos x + B \sin x$$

көрүнүштө издөөгө болот. Мында A , B анык эмес турактуу коэффициенттер. Болжолдонгон чыгарылыштын өзүн жана тиешелүү

$$\tilde{y}'(x) = (A \cos x + B \sin x)' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$\tilde{y}''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

туундуларын, берилген теңдемеге коюп,

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + A \cos x + B \sin x = \cos x$$

теңдештигин алабыз. Аны $\cos x$ менен $\sin x$ ти кармап турган коэффициенттерге карата өз – өзүнчө топтоштуруп, теңдештиктин оң жагы менен теңдештирген соң

$$\begin{cases} 2B = 1, \\ 2A = 0 \end{cases}$$

алгебралык теңдемелер системасы түзүлөт. Мындан $B = \frac{1}{2}$, $A = 0$ коэффициенттери аныкталат. Анда болжолдонгон жекече чыгарылыш

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} \sin x$$

көрүнүштө табылып, берилген бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y_{\text{ж.ч.}} = \tilde{y}(x) + y_{\text{б.т.ж.ч.}} = \frac{1}{2} \sin x + C_1 e^{-x} + x C_2 e^{-x}$$

функциясы болот. Мында C_1 , C_2 эркин тандалуучу турактуулар. ◀

18.6.4 Оң жагы $e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$ көрүнүштө болгон учур

Айталы, турактуу чыныгы коэффициенттери бар сызыктуу бир тектүү эмес

$$\mathbb{L}[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x \quad (75)$$

дифференциалдык теңдеме берилсин. Мында α, β – белгилүү чыныгы сандар, $x \in (c, d) \subset R$, $P_m(x)$ болсо m даражалуу турактуу чыныгы коэффициенттүү берилген көп мүчө.

Бул учурда сол жагы (75) теңдемесин сол жагы менен дал келип, оң жагы $e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x + i e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x$ – чыныгы өзгөрүлмөлүү комплекстик маанилүү функция болгон

$$\mathbb{L}[z] \equiv z^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} z' + p_n z = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x + i e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x, \quad (76)$$

же $\mathbb{L}[z] = e^{(\alpha+i\beta)x} P_m(x)$

жардамчы теңдемени кошо карайбыз.

(76) теңдеменин оң жагынын чыныгы бөлүгү, (75) теңдеменин оң жагы менен дал келет. Ошондуктан (76) теңдеменин чыгарылышы

$z(x) = u(x) + i v(x)$ функциясы болсо, анда чыгарылыштын $u(x)$ – чыныгы бөлүгү, берилген (75) теңдемеге чыгарылыш болору белгилүү ((48) ди кара).

Ошентип, (75) теңдемесин чечүү маселеси, жардамчы (76)

$$\mathbb{L}[z] = e^{(\alpha+i\beta)x} P_m(x)$$

теңдемени чечүүгө келтирилет.

Бул учурда 1) $\alpha + i\beta$ саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздүк теңдемесине чыгарылыш болбосо, анда (76) нын жекече чыгарылышын

$$\tilde{z}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$$

көрүнүшүндө издөөгө болот. Мында

$Q_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m$ – коэффициенттери анык эмес m даражалуу көп мүчө.

2) $\alpha + i\beta$ саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздүк теңдемесине r эселүү чыгарылыш болсо, анда (76) нын жекече чыгарылышы

$$\tilde{z}(x) = x^r e^{(\alpha+i\beta)x} Q_m(x)$$

көрүнүштө изделет.

Мисалдар

5) $y'' + y = 5x e^{-x} \cos x$ теңдемесин жекече чыгарылышын тапкыла.

► Жардамчы

$$z'' + z = 5x e^{(-1+i)x}$$

теңдемесин түзүп, анын бир тектүү бөлүгүн мүнөздүк

$\lambda^2 + 1 = 0$ теңдемесине $-1 + i$ саны чечим болбогондуктан, болжолдонгон жекече чыгарылышты

$\tilde{z}(x) = e^{(-1+i)x} (B_0x + B_1)$ жана экинчи тартиптеги туундусун

$$\tilde{z}'' = 2(-1 + i)B_0e^{(-1+i)x} + (-1 + i)^2e^{(-1+i)x} (B_0x + B_1),$$

берилген теңдемеге коюп, келип чыккан теңдештиктин эки жагын тең $e^{(-1+i)x}$ ке бөлүп жиберип,

$$(-2 + 2i)B_0 + (-2i + 1)(B_0x + B_1) = 5x$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$$\begin{cases} B_0(1 - 2i) = 5, \\ B_1(1 - 2i) + B_0(-2 + 2i) = 0 \end{cases} \text{ теңдемелер системасын түзүп,}$$

$B_0 = 1 + 2i$, $B_1 = \frac{2+14i}{5}$ коэффициенттерин аныктайбыз. Анда жекече чыгарылыш $\tilde{z}(x) = e^{(-1+i)x} \left((1 + 2i)x + \frac{2+14i}{5} \right)$ көрүнүштө болуп, анын чыныгы бөлүгү берилген теңдеменин жекече чыгарылышы

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Re} \tilde{z}(x) = \operatorname{Re} \left\{ e^{-x} (\cos x + i \sin x) \left[(1 + 2i)x + \frac{2}{5} + \frac{14}{5}i \right] \right\} = \\ &= e^{-x} \left[\left(x + \frac{2}{5} \right) \cos x - \left(2x + \frac{14}{5} \right) \sin x \right] \text{ катары эсептелет. } \blacktriangleleft \end{aligned}$$

б) t убактысын өтүүсү менен, массасы m болгон телонун аргасыз сызыктуу термелүүсү математикалык тилде

$$m x''(t) + rx'(t) + kx(t) = f(t)$$

дифференциалдык теңдемеси менен берилери белгилүү. Мында r – термелүүдөгү сүрүлүү, k – серпилүү коэффициенти, $f(t)$ – функциясы t убактысынын жүрүшүндө аргасыз термелүүнү камсыздап, мезгили менен сырттан таасир берип турган күч.

Эгерде сүрүлүүнү $r = 0$ деп, берилген теңдемени m турактуусуна бөлүп жиберип, $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{f(t)}{m} = F(t)$ белгилөөлөрүн киргизсек, берилген теңдеме

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

көрүнүшкө келет. Теңдеме ички термелүү системасын түзгөн сол жагы менен, сырттан термелүүгө таасир берген оң жагын теңдештирип турат. Оң жагы $F(t) = a \sin \beta t$ болгон учурда,

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = a \sin \beta t$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү бөлүгүнүн мүнөздүк

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ теңдемеси $\lambda_{1,2} = 0 \pm i\omega = \pm i\omega$ тамырларына ээ. Анда дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын

$$x_{\text{б.т.ж.ч.}} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \delta)$$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Анткени эркин тандалуучу сандарды

$C_1 = A \sin \delta$, $C_2 = A \cos \delta$ деп тандоо жалпылыкты бузбайт.

Эгерде $\beta \neq \omega$ болсо, же мүнөздүк теңдемеге β чечим болбосо, анда аргасыз термелүүгө сырттан таасир эткен күчтүн жыштыгы менен ички термелүү жыштыгы дал келбегендиктен, жекече чыгарылышты

$$\tilde{x}(t) = M \cos \beta t + N \sin \beta t$$

көрүнүштө издөөгө болот. M , N анык эмес коэффициенттер. Болжолдонгон чыгарылышты берилген теңдемеге коюп,

$$[t(M \cos \beta t + N \sin \beta t)]'' + \omega^2 t (M \cos \beta t + N \sin \beta t) = a \sin \beta t$$

топтошуруп,

$$\cos \beta t (\omega^2 M - M \beta^2) + \sin \beta t (\omega^2 N - N \beta^2) = a \sin \beta t$$

теңдештигин $\cos \beta t$ менен $\sin \beta t$ нын коэффициенттерине карата теңдештирсек, анда

$$\begin{cases} \omega^2 M - M \beta^2 = 0, \\ \omega^2 N - N \beta^2 = a \end{cases} \text{ теңдемелер системасынан}$$

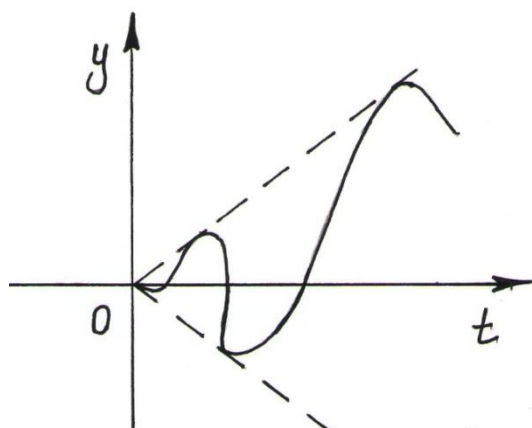
$M = 0$, $N = \frac{a}{\omega^2 - \beta^2}$ коэффициенттери табылат. Демек, жекече

чыгарылыш

$\tilde{x}(t) = \frac{a \sin \beta t}{\omega^2 - \beta^2}$ функциясы болуп, мисалда берилген аргасыз термелүүнүн теңдемесин жалпы чыгарылышы

$$x_{\text{ж.ч.}} = \tilde{x}(t) + x_{\text{б.т.ж.ч.}} = \frac{a}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t + A \sin(\omega t + \delta) \quad \text{функциясы}$$

болот. Бул учурда жыйынтыктоочу термелүү, β – жыштыгындагы ички термелүү менен, ω – жыштыгындагы сырткы күч берген термелүүнүн суммасына барабар болорун көрөбүз.



18.7-чийме

Эгерде $\beta = \omega$ болсо, анда сырткы таасир берүүчү күчтүн жыштыгы ички термелүүнүн жыштыгы менен дал келип, жекече чыгарылышты

$$\tilde{x}(t) = t(M \cos \omega t + N \sin \omega t)$$

көрүнүштө издеп, жогорудагыдай ыкма

менен $M = -\frac{a}{2\omega}$, $N = 0$ коэффициенттерин таап,

$\tilde{x}(t) = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t$ жекече чыгарылышын табабыз. Бул учурда, берилген теңдеме

$$x_{\text{ж.ч.}} = -\frac{a}{2\omega} t \cos \omega t + A \sin(\omega t + \delta) \quad (A \text{ эркин тандалуучу турактуу})$$

жалпы чыгарылышына ээ болуп, биринчи кошулуучу t убактысы узакка созулган (чектелбей өскөн) сайын чоңоюп олтургандыктан,

термелүүнүн амплитудасы да чектелбей чоңоюп олтурары көрүнөт. Мындай ички термелүү жыштыгы менен сырттан берилген термелүүнүн жыштыгы дал келген абал, резонанстык абал деп аталат (18.7 – чийме).

◀ 7) $z'' + z = e^{2it}$ теңдемесин чыгаргыла.

► Берилген теңдеменин мүнөздөгүч теңдемеси

$\lambda^2 + 1 = 0$ болот. Мындан $\lambda_{1,2} = \pm i$. Демек

$$z'' + z = 0$$

бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$z_{\text{б.т.ж.ч.}}(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$$

болот. Мында C_1, C_2 – каалаган турактуу сандар. $a = 2i$ саны

$\lambda^2 + 1 = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбойт (Себеби

$2i \neq \pm i$). Ошондуктан берилген бир тектүү эмес теңдеменин жекече чыгарылышын

$$\tilde{z}(t) = A e^{2it}$$

түрүндө изилдейбиз. Мында A – анык эмес турактуу сан. Мындан

$$\tilde{z}'(t) = A(2i)e^{2it}, \quad \tilde{z}''(t) = A \cdot 4i^2 e^{2it} = -4A e^{2it}$$

туундуларын эсептеп, берилген теңдемеге койсок

$$\tilde{z}''(t) + \tilde{z}(t) = e^{2it} \Rightarrow -4A e^{2it} + A e^{2it} = e^{2it} \Rightarrow$$

$$-3A e^{2it} = e^{2it} \Rightarrow -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, \text{ анык эмес коэффициентти}$$

табабыз. Демек, жекече чыгарылыш $\tilde{z}(t) = -\frac{1}{3} e^{2it}$ көрүнүштө болот.

Ал эми берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$z_{\text{ж.ч.}} = \tilde{z}(t) + z_{\text{б.т.ж.ч.}} = -\frac{1}{3} e^{2it} + C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$$

болот. Мында C_1, C_2 – каалаган турактуу сандар. ◀

8) $z''' - 8iz = te^{-2it}$ теңдемесин чыгаргыла.

► $a = -2i$ саны берилген теңдеменин $\lambda^3 - 8i = 0$ мүнөздөгүч теңдемесин жөнөкөй тамыры болот. Себеби

$(-2i)^3 - 8i = 0$. Бул учурда берилген бир тектүү эмес теңдеменин жекече чыгарылышын

$$\tilde{z}(t) = t e^{-2it} (At + B) = e^{-2it} (At^2 + Bt).$$

түрүндө изилдейбиз. Мында A и B – белгисиз сандар. Мындан

$$\tilde{z}'(t) = [(-2i)(At^2 + Bt) + (2At + B) + 2A] e^{-2it},$$

$$\tilde{z}''(t) = [(-2i)^2(At^2 + Bt) + 2(-2i)(2At + B) + 2A] e^{-2it},$$

$$\tilde{z}'''(t) = [(-2i)^3(At^2 + Bt) + 3(-2i)^2(2At + B) + 3(-2i) \cdot 2A] e^{-2it}.$$

Эми $\tilde{z}(t)$ менен $\tilde{z}'''(t)$ ны берилген теңдемеге коюп

$$-12 e^{-2it} (2At + B) - 12Ai e^{-2it} = t e^{-2it} \Rightarrow$$

$$(-24A)t e^{-2it} + (-12B - 12Ai) e^{-2it} = t e^{-2it}$$

ны алабыз. Мындан A , B – белгисиз сандарын аныктоо үчүн теңдемелер системасын түзүп,

$$\begin{cases} -24A = 1, \\ -12B - 12Ai = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{24}, \\ B = \frac{1}{24}i \end{cases} \text{ коэффициенттерин табабыз.}$$

Демек жекече чыгарылыш

$$\tilde{z}(t) = \frac{1}{24}(-t^2 + it) e^{-2it},$$

ал эми жалпы чыгарылыш

$$z_{\text{ж.ч.}} = \tilde{z}(t) + z_{\text{б.т.ж.ч.}} = \frac{1}{24}(-t^2 + it) e^{-2it} + C_1 e^{(\sqrt{3}+i)t} + C_2 e^{(-\sqrt{3}+i)t} + C_3 e^{-2it}$$

болот. Мында C_1, C_2, C_3 - каалаган турактуу сандар. ◀

Бир тектүү эмес (70) теңдеменин оң жагын түзүлүшүнө жараша, анын жекече чыгарылыштарын кандай түрдө издөөнү жеңилдетүү үчүн, төмөндөгү таблицаны түзүп, эстеп калабыз.

1 – Таблица

№	(70) теңдемедеги $f(x)$ тин түрү	Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары	Жекече чечимдердин түрү
1	$e^{ax} \cdot F_m(x)$	<p>a) a саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбойт $\varphi(a) \neq 0$</p> <p>b) a саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин r эселүү тамыры</p>	<p>$e^{ax} Q_m(x)$</p> <p>$x^r e^{ax} Q_m(x)$</p>
2	$F_m(x)$	<p>a) 0 саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбойт б.а. $\varphi(0) \neq 0$</p> <p>b) 0 саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин r эселүү тамыры</p>	<p>$Q_m(x)$</p> <p>$x^r Q_m(x)$</p>
3	$P_m(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x$	<p>a) $\pm (i \beta)$ сандары $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбойт б.а. $\varphi(\pm i\beta) \neq 0$</p> <p>b) $\pm (i \beta)$ сандары $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин r эселүү тамыры</p>	<p>$\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$</p> <p>$\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k$</p> <p>$x^r [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$</p> <p>$\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k$</p>
4	$e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x]$	<p>a) $\alpha \pm i\beta$ саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбойт,</p>	<p>$e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$</p>

		б.а. $\varphi(\lambda) \neq 0$ б) $\alpha \pm i\beta$ саны $\varphi(\lambda) = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин эселүү тамыры	$\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k$ $e^{\alpha x} x^r [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x$ $+ \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x]$ $\underbrace{\{m, s\}}_{\max} = k-$
--	--	--	--

Мында $x \in (c, d) \subset \mathbb{R}$; $Q_m(x)$ деп m – даражадагы, ал эми $\tilde{P}_k(x)$, $\tilde{Q}_k(x)$ деп k – даражадагы анык эмес турактуу чыныгы коэффициенттүү көп мүчөлөр; $F_m(x)$ деп m – даражадагы, ал эми $P_m(x), Q_s(x)$ деп k – даражадагы белгилүү турактуу чыныгы коэффициенттүү көп мүчөлөр; a, α, β деп белгилүү чыныгы сандар белгиленишкен.

Мисалдар

9) $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$ теңдеменин чыгарылышын тапкыла.

► Бул теңдеменин $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесинин тамырлары $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ болушат жана $\varphi(4) \neq 0$. Демек берилген бир тектүү эмес теңдеменин жекече чыгарылышын (1 – таблица, а) учур)

$$\tilde{x}(t) = Ae^{4t}$$

түрүндө изилдейбиз. Мында A - белгисиз сан. Анда болжолдонгон чечимди жана анын

$\tilde{x}'(t) = 4 Ae^{4t}$, $\tilde{x}''(t) = 16 Ae^{4t}$ туундуларын берилген теңдемеге коюп,

$$\tilde{x}''(t) - 2\tilde{x}'(t) - 3\tilde{x}(t) = e^{4t} \Rightarrow (16A - 8A - 3A) e^{4t} = e^{4t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{5} e^{4t} \text{ ээ болобуз.}$$

Демек берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x_{\text{ж.ч.}} = \frac{1}{5} e^{4t} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

функциясы болот. ◀

10) $x'' + 2x' + x = t e^{-t}$ теңдемесин чыгаргыла.

► Берилген теңдеменин бир тектүү бөлүгүнүн

$\varphi(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесин тамырлары $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ сандары, ал эми $a = -1$ саны мүнөздөгүч теңдеменин эки эселүү тамыры (1-таблица, b) учур). Демек, жекече чыгарылышты

$$\tilde{x}(t) = t^2 (At + B) e^{-t}$$

түрүндө издейбиз. Мында A, B – белгисиз сандар. Анда болжолдонгон чечимди жана анын

$$\tilde{x}'(t) = [-At^3 + (3A - B)t^2] + 2Bt e^{-t},$$

$\tilde{x}''(t) = [At^3 - (6A - B)t^2 + 2(3A - 2B)t + 2B] e^{-t}$ туундуларын теңдемеге коюп,

$$\tilde{x}''(t) + 2\tilde{x}'(t) + \tilde{x}(t) = t e^{-t} \Rightarrow 6A t e^{-t} + 2B e^{-t} = t e^{-t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A = 1, \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} \text{ жекече чыгарылышын табабыз.}$$

Демек, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x_{\text{ж.ч.}} = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

функциясы болот. ◀

11) $x'' + 2x' + x = e^{-t} \cos t$ теңдемесин чыгаргыла.

► $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$ сандары $\varphi(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин чыгарылышы эмес (1-таблицадагы 3 a) учур). Демек, жекече чыгарылышты

$$\tilde{x}(t) = e^{-t} (A \cos t + B \sin t)$$

түрүндө издейбиз. Анда болжолдонгон чыгарылышты жана анын

$$\tilde{x}'(t) = e^{-t}[(B - A)\cos t + (-A - B)\sin t],$$

$$\tilde{x}''(t) = e^{-t}[-2B\cos t + 2A\sin t] \text{ туундуларын теңдемеге койсок}$$

$$\tilde{x}''(t) + 2\tilde{x}'(t) + \tilde{x}(t) = e^{-t} \cos t \Rightarrow e^{-t}(-A\cos t - B\sin t) = e^{-t}\cos t$$

$$\Rightarrow -A = 1, B = 0 \Rightarrow A = -1, B = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = -e^{-t}\cos t \text{ жекече чыгарылышын аныктайбыз.}$$

Демек, берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$x_{\text{ж.ч.}} = -e^{-t}\cos t + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

функциясы болот. Мында C_1, C_2 – каалаган турактуу сандар. ◀

§ 18.7 Дифференциалдык теңдемелерди интегралдоодо даражалуу жана жалпыланган катарларды колдонуу

Практикалык эсептөөлөрдө дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын, кайсы бир конкреттүү чекиттин жака белиндеги маанилерин табуу талап кылынган учурлар көп кездешет. Мындай чекиттердин жака белиндеги чыгарылыштарды Кошинин маселесине таянып, жыйналуучу катарлардын суммасы катарында издөө ыкмасын карайбыз.

Айталы,

$$y'' = f(x, y, y') \quad (77)$$

дифференциалдык теңдемесин Кошинин

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (78)$$

шарттарын канааттандырган чыгарылыштарын табуу талап кылынсын.

$f(x, y, y')$ функциясы $(x_0; y_0; y'_0)$ чекитин жакынкы чеке белинде аналитикалык функция болсун деп ойлойлу, б.а. ушул чекиттин жакынкы чеке белинде $x - x_0, y - y_0, y' - y'_0$ айырмаларын

даражалары боюнча даражалуу катарга ажырасын. Анда Кошинин (77), (78) маселесин $y(x)$ чыгарылышын

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (79)$$

катары сыяктуу жазууга болот. Чынында эле, x_0, y_0, y'_0 – сандары белгилүү болгондуктан (77) теңдемеден $y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0)$ сандык маанисин таба алабыз.

(77) теңдемесин x өзгөрүлмөсү боюнча дагы бир жолу дифференцирлеп

$$y''' = f'_x + f'_y \cdot y' + f'_{y'} \cdot y'',$$

барабардыктын оң жагына $x_0, y_0, y'_0, y''(x_0)$ – белгилүү сандарын коюу менен $y'''(x_0)$ – санын да аныктай алабыз. Ушул процессти ырааттуу улантуу менен $y^{(n)}(x_0)$ – санын жана андан жогорку тартиптеги туундулардын x_0 чекитиндеги маанилерин табууга болот. Демек, (79) катардын коэффициенттерин бир маанилүү табылат жана кайсы бир $(x_0 + h; x_0 - h)$ интервалында жыйналуучу болсо, анын суммасы ошол интервалда Кошинин маселесин чыгарылышы болот.

Мисалы, $y'' = y$ дифференциалдык теңдемесине коюлган Кошинин

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \text{ маселесин чыгаралы. Берилген теңдемеден } x_0 = 0$$

чекитинде $y''(0) = y(0) = 1$ болору келип чыгат. Теңдемени x боюнча дагы бир жолу дифференцирлеп,

$y''' = y'$ теңдештигине $x_0 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$ маанилерин койсок, $y'''(0) = 1$ болорун көрөбүз. Ушул процессти уланта берип, жалпы учурда $y^{(n)}(0) = 1$ болоруна ишенебиз. Анда берилген теңдеменин чыгарылышы $(-\infty, +\infty)$ интервалында

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots = e^x$$

функциясы экендиги келип чыгат.

Коэффициенттери өзгөрүлмө болгон сызыктуу

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \quad (80)$$

бир тектүү дифференциалдык теңдемени карайлы.

18.7 Теорема. Эгерде $x = x_0$ чекитин жакынкы чеке белинде $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ коэффициенттери аналитикалык функциялар болушса жана $p_0(x) \neq 0$ нөлдөн айырмалуу функция болсо, анда (80) теңдемесин чыгарылыштары да $x = x_0$ чекитин жакынкы чеке белинде аналитикалык функциялар болушуп, аларды

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (81)$$

көрүнүштө издөөгө болот.

Теореманы далилдөөсүз калтырып, аны колдонууну мисал аркылуу көрсөтөлү:

$y'' = y$ дифференциалдык теңдемесине коюлган Кошинин

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 1 \end{cases} \text{ маселесин чыгаруу үчүн, } x_0 = 0 \text{ чекитин жакынкы чеке}$$

белинде болжолдонгон чыгарылышты

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

көрүнүштө издеп, тиешелүү туундуларын эсептейли

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

$y(x)$ менен $y''(x)$ тин маанилерин берилген теңдемеге коюп

$$1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots + n \cdot (n-1)a_n x^{n-2} + \dots =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

x тин бирдей даражаларына карата топтоштуруп, болжолдонгон чыгарылыш теңдемени канааттандырат деп ойлоп,

$$a_0 + 2a_2 + (a_1 + 3 \cdot 2a_3)x + \dots + (a_{n-2} + n \cdot (n-1)a_n)x^{n-2} + \dots = 0$$

теңдештигине ээ болобуз. Теңдештик орун алышы үчүн x тин бардык даражаларын (нөлүнчү даражасынан баштап) коэффициенттери нөлгө тең болушуп,

$$a_0 + 2a_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2},$$

$$a_1 + 3 \cdot 2a_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_3 = -\frac{a_1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

.....

$$a_{n-2} + n \cdot (n-1)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n \cdot (n-1)}$$

көрүнүштөгү байланышта болору келип чыгат. Кошинин баштапкы шартынан $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ аныкталышкандыктан, жогорудагы байланыштан

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad \dots,$$

жуп номер менен белгиленген коэффициенттер $a_{2k} = 0$, ал эми так номер менен белгиленген коэффициенттер $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ көрүнүштөрдө табыларын көрөбүз.

Табылган коэффициенттердин сандык маанилерин болжолдонгон чыгарылышка коюп, $x_0 = 0$ чекитин жакынкы чеке белиндеги

$$\begin{aligned} y(x) &= 1a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sin x \end{aligned}$$

жалгыз чыгарылышты табабыз.

Айталы $p_0(x)$ коэффициенттери нөлгө барабар болсун дейли. Бул учурда чыгарылышты жалпыланган катардын суммасы катарында издөөгө болот:

18.8 Теорема (чечимдин жалпыланган даражалуу катарга ажыралышы жөнүндөгү). Эгерде

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \quad (82)$$

теңдемесин $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ коэффициенттери x_0 чекитин жакынкы чеке белинде аналитикалык функциялар болгону менен, $x = x_0$ чекитин өзү $p_0(x)$ функциясына m – тартиптеги нөлдөр, $p_1(x)$ функциясына $(m - 1)$ же андан чоң тартиптеги нөлдөр (эгерде $m > 1$ болсо), $p_2(x)$ функциясына $(m - 2)$ же андан чоң тартиптеги нөлдөр (эгерде $m > 2$ болсо) болсо, анда (82) теңдеменин жок дегенде бир жалпыланган көрүнүштөгү

$$y(x) = a_0(x - x_0)^\sigma + a_1(x - x_0)^{\sigma+1} + \dots + a_n(x - x_0)^{n+\sigma} + \dots$$

катарынын суммасы болгон нөлдүк эмес $y(x)$ чыгарылышы жашайт. Мында σ – кандайдыр бир чыныгы сан (бүтүн сан болушу шарт эмес).

Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, кызыгуучуларга Краснов М.Л. ж.б. Вся высшая математика, т -3, XXII гл., § 12 де баяндалган Бесселдин теңдемелерин чыгарууда колдонулган ыкмаларды окуп үйрөнүүнү сунуш кылабыз.

8. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү бир тектүү эмес теңдемелердин жалпы чыгарылышын тапкыла (64 – 90).

$$64. x'' + 16x = e^{3t},$$

$$65. x'' - x' - 2x = 3t + 4,$$

$$66. x'' - x' - 6x = 2\sin 3t.$$

$$67. 4x'' + 4x' + x = 3te^t,$$

$$68. x'' + x' + x = \sin^2 t,$$

$$69. 2x'' + 4x' + 7x = t^2,$$

$$70. x'' - 4x = \sin t,$$

$$71. x'' - 4x = \cos t.$$

$$72. x'' + 2x' - 3x = 1 + t e^t, \quad 73. x'' + 9x = 2\cos 3t + 3\sin 3t.$$

$$74. x''' + 4x' = 3t - 1, \quad 75. x''' + x' = 2 - \sin t.$$

$$76. x'' + 2x' + 5x = e^t \sin t. \quad 77. x^{(IV)} - 2x'' + x = t e^t.$$

$$78. x^{(V)} + 5x^{(IV)} - x = 17. \quad 79. x'' + 9x = 2t^2 e^{3t} + 5.$$

$$80. x'' + x = \sin t + t \cos x. \quad 81. x^{(IV)} - 5x'' + 4x = e^t - t e^{2t}.$$

$$82. x^{(V)} + 2x''' + 2x'' = 3t^2 - 1. \quad 83. x''' - x = e^t + 7.$$

$$84. x'' - 2x' + 2x = e^t \sin t. \quad 85. x^{(V)} - x''' = e^t + 2t^2$$

$$86. x'' + 4x = 3t \cos 2t. \quad 87. x''' - x'' - 12x' = t - 2t e^{-3t},$$

$$88. x'' + 3x' + 2x = t(e^{-t} - e^{-2t}). \quad 89. x'' - 6x' + 13x = t e^{3t} \sin 2t.$$

$$90. x^{(IV)} + 5x'' + 4x = \sin t + \cos 2t.$$

Төмөнкү Коши маселесин чыгаргыла (91 – 99) .

$$91. y'' + 4y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$92. y'' + 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

$$93. y'' + 9y = \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$94. y'' + y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$95. y'' - 2y' + 2y = x + 1, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$96. y^{(IV)} - 4y'' = x^2, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = y'''(0) = -1.$$

$$97. y''' - 2y'' + y' = 1 + x e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

$$98. y'' + 2y' + 2y = \sin 3x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$99. y''' + y'' = x + e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

Төмөнкү теңдемелердин жалпы чыгарылышын вариация методу менен чыгаргыла (100 – 108).

$$100. y'' + 3y' + 2y = 4 e^x$$

$$101. y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}.$$

102. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

103. $y'' - 4y = \operatorname{sh}2x$

104. $y'' + 4y = \cos 3x$.

105. $y'' + 9y = \sin 3x$.

106. $y'' + 4y = \sin^2 x$.

107. $y'' - 4y = x e^x$.

108. $y'' + 9y = 9 \sec 3x$.

Төмөндөгү бир тектүү эмес теңдемеге туура келген бир тектүү теңдеменин y_x жалпы чыгарылышы берилген. Вариация методу менен берилген бир тектүү эмес теңдеменин жекече чыгарылышын тапкыла (109 – 113).

109. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^3$, $y_x = C_1 x^2 + C_2 x^3$.

110. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^4$, $y_x = x^2(C_1 + C_2 \ln x)$.

111. $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 8x^{4/3}$, $y_x = C_1 x + C_2 x^{3/4}$.

112. $x^2 y'' + xy' + y = \ln x$, $y_x = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$.

113. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$, $y_x = C_1 x + C_2(1 + x^2)$.

§18.8 Дифференциалдык теңдемелер системасы

18.8.1 Дифференциалдык теңдемелер системасы жөнүндө түшүнүк

Үч өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан материалдык чекитке аракет кылган күч белгилүү болсо, анда чекиттин кыймылдоо законун аныктоо маселеси дифференциалдык теңдемелер системасын түзүү аркылуу чечилет. Чынында эле, t убактысын өтүүсүнө жараша өзгөрүп турган материалдык чекиттин абалы же кыймылдоо закону,

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = g\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = h\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{cases} \quad (83)$$

теңдемелер системасын чечими катары табылган $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ координаталары (функциялары) аркылуу аныкталат. Мында x ,

y, z – кыймылда болгон материалдык чекиттин координаталары, t – убакыт, f, g, h – өздөрүн аргументтерине карата белгилүү функциялар.

Белгисиз функциялардын жогорку тартиптеги туундуларына карата чыгарылган (83) сыяктуу теңдемелер системасы, каноникалык теңдемелер системасы деп аталат.

Белгисиз функциялардын туундуларына карата чыгарылган биринчи тартиптеги

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (83^H)$$

дифференциалдык теңдемелердин системасын нормалдык теңдемелер системасы дейбиз. Мында $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – белгисиз функциялар

Кандай гана каноникалык теңдемелер системасы берилбесин, кошумча жардамчы функцияларды киргизүү менен аны нормалдык көрүнүшкө келтирүүгө болот. Ошондуктан нормалдык көрүнүштөгү дифференциалдык теңдемелер системасын окуп үйрөнүү жетиштүү болот.

Мисалы, $\frac{d^2x}{dt^2} = -x$ теңдемесине $y = \frac{dx}{dt}$ жардамчы функциясын киргизүү менен, ага эквиваленттүү

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$
 нормалдык көрүнүштөгү теңдемелер системасын түзө алабыз.

n – белгисиздүү n сандагы (83^H) нормалдык теңдемелер системасын (a, b) интервалындагы чыгарылышы деп, $a < t < b$ аралыгында дифференцирленүүчү болуп (83^H) системасына койгондо, аны теңдешикке айланткан n сандагы

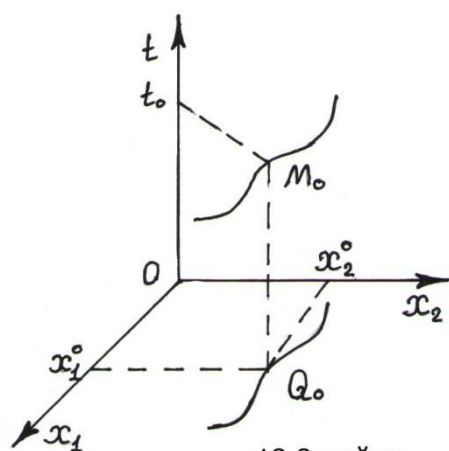
$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ функцияларды түшүнөбүз.

(83^H) системасын $t = t_0$ болгондо

$x_1|_{t=t_0} = x_1^0$, $x_2|_{t=t_0} = x_2^0$, ... , $x_n|_{t=t_0} = x_n^0$ шарттарын канааттандырган чыгарылышын табуу маселеси, Кошинин маселеси деп аталат. Мисалы $n = 2$ болгон учурда

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) , \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \end{cases} \quad \text{теңдемелер системасына коюлган Кошинин}$$

маселесин чыгарылышын, геометриялык жактан Otx_1x_2 координаталар системасында жайгашкан $M_0(t_0, x_1^0, x_2^0)$ чекити аркылуу өтүүчү жалгыз гана ийринин табылуусу менен түшүндүрөбүз (18.8 – чийме).



18.8-чийме

Чыгарылыш ийриси нормалдык системанын интегралдык ийриси деп аталат. Эгерде t убактысын чекиттин координатасы деп түшүнбөстөн параметр катары эсептесек, анда чыгарылыш ийрисин Ox_1x_2 тегиздигиндеги $Q_0(x_1^0, x_2^0)$ чекити аркылуу өтүп,

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) , \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \quad \text{теңдемеси менен берилген,}$$

жалгыз ийри катарында кароого болот (18.8– чийме).

Жогорку тартиптеги туундусуна карата чыгарылган бир дифференциалдык теңдемени, каноникалык дифференциалдык теңдемелер системасынын жекече учуру катарында карап, кошумча жардамчы функцияларды киргизүү менен нормалдык системага келтирүүгө болот. Чынында эле, жогорку тартиптеги туундусуна карата чыгарылган

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

n –тартиптеги бир дифференциалдык теңдемени, жаңы жардамчы

$x_1 = x'(t)$, $x_2 = x''(t)$, ... , $x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$ функцияларын киргизүү менен, ага тең күчтүү болгон

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_{n-1}, \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

көрүнүштөгү нормалдык теңдемелер системасына өзгөртүп түзө алабыз. Тескерисинче, акыркы нормалдык системаны кайра бир n – тартиптеги дифференциалдык теңдеме катарында жазууга болот. Ошентип, жогорку тартиптеги туундусуна карата чечилген бардык дифференциалдык теңдемелер, кандайдыр бир нормалдык теңдемелер системасына эквиваленттүү болот жана тескерисинче.

18.8.2 Мааниси матрица болгон функциялар

Төмөндөгү матрица

$$A(t) = [a_{ij}(t)] = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

мааниси $m \times n$ – өлчөмдүү матрица болгон функция же матрица – функция деп аталат. Мында матрицанын элементтери

$a_{ij}(t)$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, t \in (a, b) \subset R,$) функциялар болушат.

$$\text{Ал эми } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = [x_i(t)] \text{ вектору,}$$

мааниси вектор болгон функция деп аталат же мааниси $n \times 1$ -өлчөмдүү матрица болгон функция деп аталат.

Эгерде (a, b) интервалын бардык чекиттеринде $A(t)$ матрица – функциясын $a_{ij}(t)$ элементтери үзгүлтүксүз (дифференцирленүүчү) функциялар болушса, анда $A(t)$ матрицасы (a, b) интервалында

үзгүлтүксүз (дифференцирленүүчү) деп аталат. Дифференцирленүүчү $A(t)$ матрица функциясын туундусу, ал матрицанын ар бир элементтеринен туунду алуу аркылуу аныкталат, б.а.

$$A'(t) = \frac{dA}{dt} = \left[\frac{da_{ij}(t)}{dt} \right].$$

Мисал

1) Эгерде

$$X(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ жана } A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 2t+1 & \cos t \end{pmatrix} \text{ болсо, анда туундулары}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} (t)' \\ (t^3)' \\ (e^{-2t})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ жана } \frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 2 & -\sin t \end{pmatrix}$$

болот.

Матрица функцияларды дифференцирлөөдө төмөндөгү эрежелер орун алат:

$$1. \frac{d}{dt} [A(t) + B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt};$$

$$2. \frac{d}{dt} (AB) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt};$$

$$3. \frac{d}{dt} (cA(t)) = c \frac{dA}{dt}, \text{ } c - \text{турактуу сан};$$

$$4. \frac{d}{dt} (CA) = C \frac{dA}{dt} \text{ жана}$$

$$\frac{d}{dt} (AC) = \frac{dA}{dt} C, \text{ мында } C - \text{турактуу матрица.}$$

бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасы деп аталат.

Мисалдар

$$2) \quad \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 7x_2, \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad \text{теңдемелер системасын}$$

чыгарылыштары

$$\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{жана} \quad \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix} \quad \text{вектор функциялары болорун}$$

көрсөткүлө.

► Берилген системаны матрица түрүндө жазайлы:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} X = P X, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Вектор функцияларды теңдемелер системасына коюп көрүп:

$$P \bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3e^{2t} + (-3) \cdot 2e^{2t} \\ 6 \cdot 3e^{2t} + (-7) \cdot 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3e^{2t})' \\ (2e^{2t})' \end{pmatrix} = X_1',$$

$$P \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^{-5t} \\ -15e^{-5t} \end{pmatrix} = X_2', \quad \text{алардын чыгарылыш}$$

экендигине ишенебиз. ◀

18.9 Теорема (Суперпозиция принциби).

$\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары (85) бир тектүү системанын чыгарылыштары болсун дейли, мында

$$\bar{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Анда ар кандай C_1, C_2, \dots, C_n турактуу сандары үчүн, берилген вектор – функциялардын

$$X(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) + \dots + C_n \bar{X}_n(t)$$

сызыктуу комбинациясы да бир тектүү (85) системанын чыгарылышы болот.

► **Далилдөө:** Ар кандай i үчүн ($i=1, 2, \dots, n$),

$$\bar{X}'_i = P \bar{X}_i \text{ экендигин эске алсак, анда}$$

$$\begin{aligned} X' &= C_1 \bar{X}'_1 + C_2 \bar{X}'_2 + \dots + C_n \bar{X}'_n = \\ &= C_1 P(t) \bar{X}_1 + C_2 P(t) \bar{X}_2 + \dots + C_n P(t) \bar{X}_n = \\ &= P(t) [C_1 \bar{X}_1 + C_2 \bar{X}_2 + \dots + C_n \bar{X}_n] = P(t) X, \text{ же болбосо} \end{aligned}$$

$$X' = P(t) X$$

келип чыгып, теореманын кортундусунун туура экендиги далилденет.



Мисал.

$$3) \bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \text{ жана } \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix} \text{ вектор - функциялары, 2 -}$$

мисалдагы

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = P X, \quad X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

системанын берилген чыгарылыштары болсун. Анда алардын

$$X(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix}$$

сызыктуу комбинациясы жогорудагы системанын чыгарылышы болорун көрсөткүлө.

► Матрица теңдеменин оң жагына сызыктуу комбинацияны койсок,

$$\begin{aligned} P X &\equiv P (\bar{X}_1(t) + \bar{X}_2(t)) \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-5t} \\ e^{2t} + 3e^{-5t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 12e^{2t} + 4e^{-5t} - 6e^{2t} - 9e^{-5t} \\ 18e^{2t} + 6e^{-5t} - 14e^{2t} - 21e^{-5t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 6e^{2t} - 5e^{-5t} \\ 4e^{2t} - 15e^{-5t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1'(t) \\ \bar{X}_2'(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{dX}{dt} \times \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = P X, \text{ же}
\end{aligned}$$

сызыктуу комбинациянын да чечим болору келип чыгат. ◀

18.8.4 Сызыктуу көз карандысыздык жана бир тектүү системанын жалпы чыгарылышынын түзүлүшү

18.5 Аныктама. Эгерде $I = (a, b)$ интервалында аныкталган n – өлчөмдүү $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары жана C_1, C_2, \dots, C_n турактуу сандары үчүн

$$\forall t \in I: C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) + \dots + C_n \bar{X}_n(t) = 0 \quad (86)$$

теңдештиги C_1, C_2, \dots, C_n сандарын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болсо деле аткарыла берсе, анда $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары $I = (a, b)$ интервалында **сызыктуу көз каранды** вектор – функциялардын системасын түзөт дейбиз.

Тескерисинче, (86) теңдештиги $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ болгондо гана аткарылса, анда $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары (a, b) интервалында **сызыктуу көз карандысыз** вектор – функциялардын системасын түзүшөт деп айтабыз.

Айталы n өлчөмдүү $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялар бир тектүү (85) системанын чыгарылыштары болсун, мында

$$\bar{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Анда төмөнкү

$$W(t) = W \left(\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t) \right) = \begin{vmatrix} x_{11}(t)x_{12}(t)\dots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t)x_{22}(t)\dots x_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n1}(t)x_{n2}(t)\dots x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$n \times n$ – аныктагычын, берилген вектор – функциялардын Вронскианы же Вронскийдин аныктагычы деп атайбыз.

18.10 Теорема. Эгерде

1. $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары бир тектүү (85) системанын (a, b) интервалындагы чыгарылыштары, ал эми

$W(t) = W \left(\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t) \right)$ алардын Вронскианы болсо;

2. $P(t)$ матрицасы (a, b) интервалында үзгүлтүксүз матрица – функция болсо.

Анда:

1. Эгерде $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ сызыктуу көз каранды болсо, анда

$$W(t) = 0, \quad \forall t \in (a, b);$$

2. Эгерде $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ сызыктуу көз карандысыз болсо, анда

$$W(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

шарттары орун алат.

Демек, бир тектүү (85) системанын чыгарылыштары үчүн, мүмкүн болгон учурлар экөө гана:

$$\forall t \in (a, b): \quad W(t) = 0, \quad \text{же} \quad W(t) \neq 0.$$

► **Далилдөө:** Бул теореманы карама – каршысынан далилдейли.

1) Айталы, тескерисинче $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары (a, b) интервалында сызыктуу көз каранды болгонуна карабастан, кандайдыр бир $t_0 \in (a, b)$ чекитинде $W(t_0) \neq 0$ болуп калсын дейли. Бирок, теореманын шарты боюнча вектор – функциялар (a, b) интервалын бардык чекиттеринде сызыктуу көз каранды болушкандыктан, C_1, C_2, \dots, C_n сандарын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болсо деле, $t_0 \in (a, b)$ чекитинде (86) барабардык аткарылууга тийиш, б.а.

$$C_1 \bar{X}_1(t_0) + C_2 \bar{X}_2(t_0) + \dots + C_n \bar{X}_n(t_0) = 0. \quad (87)$$

Бирок, $W(t_0) \neq 0$ деп эсептелгендиктен, (87) бир тектүү алгебралык теңдемелердин системасы C_1, C_2, \dots, C_n белгисиздерине карата жалгыз гана чыгарылышка ээ болот. Анда (87) нин нөлдүк

$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ чыгарылыштан башка чыгарылышы жок дегенге бүтүмгө келебиз.

Бул болсо t_0 чекитинде C_1, C_2, \dots, C_n сандарын жок дегенде бирөө нөлдөн айырмалуу болсо деле (87) аткарылат

дегенге, б.а. $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функцияларын сызыктуу көз карандылыгына карама – каршы келет. Мындай карама – каршылык теореманын 1 – бүтүмүнүн туура экендигин далилдейт.

2) Теореманын 2 – бүтүмүн да каршысынан далилдеп, тескерисинче

$\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары сызыктуу көз каранды эмес болгонуна карабастан, интервалдын кайсы бир $t_0 \in (a, b)$ чекитинде $W(t_0) = 0$ болсун дейли. Анда (87) системасы C_1, C_2, \dots, C_n белгисиздерине карата нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот. Бул болсо, $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функцияларын интервалдын бардык чекиттеринде сызыктуу көз карандысыз болгонуна карама – каршы келет.

Мындай карама – каршылык тескери оюбуздун туура эмес экендигин же теореманын кортундуларын туура аткарылышын далилдейт. ◀

Мисал.

$$4) \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \text{ системанын чыгарылыштары болгон}$$

$$\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} \text{ вектор – функцияларын}$$

сызыктуу көз карандысыздыгын көргөзгүлө.

► Вронскианын эсептейбиз:

$$W(t) = W(\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \bar{X}_3(t)) = \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -3e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{9t} [-4 - 12 - (12+4)] = 32 e^{9t} \neq 0,$$

$\forall t \in (-\infty, \infty)$. Демек, 18.10 теоремасын негизинде $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \bar{X}_3(t)$ вектор – функциялары сызыктуу көз каранды эмес. ◀

18.11 Теорема. $\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)$ вектор – функциялары бир тектүү (85) системанын (a, b) интервалындагы сызыктуу көз карандысыз чыгарылыштары болсун жана $P(t)$ – матрицасы (a, b) интервалында үзгүлтүксүз матрица – функция болсун. Анда бир тектүү (85) системанын жалпы чыгарылышы

$$X(t)_{\text{ж.ч.}} = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) + \dots + C_n \bar{X}_n(t), \quad t \in (a, b) \quad (88)$$

формуласы аркылуу аныкталат. C_1, C_2, \dots, C_n – каалаган турактуу сандар.

(88) чыгарылышын

$$X(t)_{\text{б.т.ж.ч.}} = \mathbb{X}(t) C, \quad t \in (a, b), \quad (88^A)$$

вектор – функция көрүнүштө жазууга да болот. Мында

$$\mathbb{X}(t) = [\bar{X}_1(t), \bar{X}_2(t), \dots, \bar{X}_n(t)] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$n \times n - \text{матрица} - \text{функция}; C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} - n \text{ өлчөмдүү вектор.}$$

Эгерде

$$\det \mathbb{X}(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b) \quad (89)$$

болсо, анда $\mathbb{X}(t)$ матрица – функциясын бир тектүү (85) системанын фундаменталдык матрицасы деп атайбыз.

18.8.5 Бир тектүү теңдемелер системасы үчүн Кошинин маселеси

Бир тектүү теңдемелер системасына төмөнкү Кошинин маселесин карайлы

$$X'(t) = P(t) X, \quad (85)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad t_0 \in (a, b), \quad (90)$$

мында t_0 - белгилүү сан,

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix} - \text{белгилүү вектор.}$$

Берилген (85) системанын жалпы чыгарылышы 18.11 теореманын негизинде (88) формула аркылуу аныкталат. Анда (88^A) жана (90) нун негизинде

$$\mathbb{X}(t_0) C = X_0 \quad (91)$$

сызыктуу алгебралык теңдемелердин системасын алабыз. Мында

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} - \text{белгисиз вектор.}$$

Бирок, (89) шарттын негизинде $\det X(t_0) \neq 0$ болгондуктан $X(t_0)$ матрицасын $X^{-1}(t_0)$ тескери матрицасы жашайт. Демек, (91) системасы жалгыз чыгарылышка ээ болот жана ал системаны тескери матрица методу менен чыгарып,

$$C = X^{-1}(t_0) X_0 \quad (92)$$

белгисиз турактуу векторун аныктай алабыз. (92) туюнтууну (88^A) формулага коюп

$$X(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot X_0, \quad (93)$$

бир тектүү (85) системанын баштапкы (90) шартын канааттандырган вектор – функция көрүнүштөгү жалгыз чыгарылышын таба алабыз.

18.8.6 Бир тектүү эмес теңдемелер системасы үчүн Кошинин маселеси. Вариация ыкмасы

Матрицалык көрүнүштө берилген бир тектүү эмес

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X + f(t), \quad t \in (a, b) \quad (84)$$

теңдемелер системасын Кошинин

$$X(t_0) = X_0, \quad t_0 \in (a, b) \quad (90)$$

баштапкы шарттарын канааттандырган (Кошинин маселесин) чыгарылышын табуу маселесин карайлы.

18.12 Теорема. Эгерде $P(t) = (p_{ij}(t))$ матрица – функциясы менен

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \text{ вектор – функциясы } (a, b) \text{ интервалында үзгүлтүксүз}$$

функциялар болууса жана $X(t)$ матрица – функциясы бир тектүү (85) системанын фундаменталдык матрицасы болсо ($i, j = 1, 2, \dots, n$), анда

1) (84) теңдемелер системасы $\forall t_0 \in (a, b)$ чекитинде берилген ар кандай Кошинин баштапкы $X(t_0) = X_0$ шартын канааттандырган жалгыз гана чыгарылышка ээ болот жана ал чыгарылыш

$$X(t) = \mathbb{X}(t) \cdot \mathbb{X}^{-1}(t_0) \cdot X_0 + \int_{t_0}^t \mathbb{X}(t) \cdot \mathbb{X}^{-1}(s) \cdot f(s) ds, \quad t \in (a, b) \quad (94)$$

формуласы менен аныкталат,

2) Эгерде $\bar{X}(t)$ вектор – функциясы бир тектүү эмес (84) системанын кандайдыр бир жекече чыгарылышы болсо, анда бир тектүү эмес (84) системанын жалпы чыгарылышы

$$\begin{aligned} X(t)_{\text{б.т.э.ж.ч.}} &= \bar{X}(t) + X(t)_{\text{б.т.ж.ч.}} = \\ &= \bar{X}(t) + \mathbb{X}(t) \cdot \mathbb{X}^{-1}(t_0) \cdot X_0, \quad t \in (a, b) \quad (95) \end{aligned}$$

вектор – функциясы көрүнүшүштө жазылат. Мында

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} - \text{турактуу вектор, } C_1, C_2, \dots, C_n - \text{каалаган турактуу}$$

сандар;

3) (84), (90) Кошинин маселеси төмөнкү

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t P(s)X(s) ds + \int_{t_0}^t f(s) ds, \quad t \in (a, b,) \quad (96)$$

сызыктуу интегралдык теңдемелердин системасына эквиваленттүү,

ЭСКЕРТҮҮ. (96) түрдөгү системаны биринчи жолу математик Вольтер изилдегендиктен жана белгисиз $X(t)$ вектор – функциясы интеграл алдында тургандыктан, бул (96) система Вольтердин сызыктуу интегралдык теңдемелер системасы деп аталат.

Эми бир тектүү эмес (84) системаны вариация методу менен чыгаралы. Төмөндөгү

$$\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ \dots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{2n}(t) \end{pmatrix}, \dots, \quad \bar{X}_n(t) = \begin{pmatrix} x_{n1}(t) \\ x_{n2}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

вектор – функциялары бир тектүү (85) системанын чыгарылыштарын фундаменталдуу системасы болсун, б.а. (85) системанын n сандагы сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышы болсун. Вариация методу боюнча бир тектүү эмес (84) системанын кандайдыр бир жекече чыгарылышын

$$X(t) = C_1(t)\bar{X}_1(t) + C_2(t)\bar{X}_2(t) + \dots + C_n(t)\bar{X}_n(t), \quad (97)$$

түрүндө издейбиз. Мындагы $C_1(t)$, $C_2(t)$, ..., $C_n(t)$ белгисиз функциялары

$$C_1'(t)\bar{X}_1(t) + C_2'(t)\bar{X}_2(t) + \dots + C_n'(t)\bar{X}_n(t) = f(t), \quad (98)$$

системасынан аныкталат. Мында $\bar{X}_1(t)$, $\bar{X}_2(t)$, ..., $\bar{X}_n(t)$ фундаменталдык системанын Вронский аныктагычы нөлгө барабар эмес болгондуктан, (98) системадан $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, ..., $C_n'(t)$ ларды

$C_i'(t) = \varphi_i(t)$ көрүнүштө бир маанилүү аныктап ($i = 1, 2, \dots, n$),

интегралдоо аркылуу

$$C_i = \int \varphi_i(t)dt + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (99)$$

$C_1(t)$, $C_2(t)$, ..., $C_n(t)$ белгисиз функцияларын табабыз.

Мында c_1 , c_2 , ..., c_n – интегралдоо турактуулары болгон каалаган сандар. Акырында (99) ду (97) ге коюп,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i(t) \left[\int \varphi_i(t)dt + c_i \right]$$

бир тектүү эмес (84) системанын жекече чыгарылышын вариация методу менен чыгарган болобуз.

Мисал.

$$5) \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 15e^t \sqrt{t} \end{cases} \quad \text{бир тектүү эмес системанын жалпы}$$

чыгарылышын вариация методу менен тапкыла.

► Төмөнкү

$$\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ (t - \frac{1}{2})e^t \end{pmatrix}$$

вектор – функциялары

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

бир тектүү системанын чыгарылыштарын фундаменталдуу системасы болот. Мисалда берилген бир тектүү эмес системанын кайсы бир жекече чыгарылышын

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} te^t \\ (t - \frac{1}{2})e^t \end{pmatrix}$$

түрүндө изилдейбиз, (98) дин негизинде $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ функцияларын

$$C_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(t) e^t \begin{pmatrix} t \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15e^t \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

системасынан аныктасак (Крамердин же Гаусстун методу менен), анда

$$C_1'(t) = 30 t^{3/2}, \quad C_2'(t) = -30 t^{1/2}$$

келип чыгат. Мындан

$$C_1(t) = \int 30 t^{3/2} dt = 12t^{5/2} + c_1,$$

$$C_2(t) = \int (-30 t^{1/2}) dt = -20 t^{3/2} + c_2$$

табылышат. Демек, берилген системанын жекече чыгарылышы

$$x_1(t) = (c_1 + c_2 t - 8 t^{5/2}) e^t,$$

$$x_2(t) = [c_1 + c_2 (t - \frac{1}{2}) - 8 t^{5/2} + 10 t^{3/2}] e^t$$

көрүнүштө жазылат. ◀

туюнтууларын (100) системага коюп жана $e^{\lambda t}$ га кыскартып λ ,

v_1, v_2, \dots, v_n сандарын аныктоо үчүн n сандагы алгебралык бир тектүү сызыктуу теңдемелердин системасын алабыз. Бул алгебралык бир тектүү системанын нөлдүк эмес чыгарылыштарын таап, (100) системанын $X(t) = V e^{\lambda t}$ түрүндөгү чыгарылышына ээ болобуз.

Бул методду айкын көрсөтүү үчүн бир тектүү (100) системаны матрицалык түрдө жазалы:

$$X' = A X, \quad (102)$$

мында

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$X = V e^{\lambda t}$ жана $X' = \lambda V e^{\lambda t}$ ны (102) системага коюп,
 $\lambda V e^{\lambda t} = A V e^{\lambda t}$

ээ болобуз. Мындан, нөлгө барабар болбогон $e^{\lambda t}$ скалярдык көбөйтүүчүгө кыскартсак, анда

$$A V = \lambda V \quad (103)$$

системасы келип чыгат. Мындан (102) системанын нөлдүк эмес $X = V e^{\lambda t}$ чыгарылышы табыла тургандай λ санын тандап, λ санына туура келген (103) системанын нөлдүк эмес чыгарылышын табууга болот. Ал үчүн (103) системаны

$$(A - \lambda I_n) V = 0, \quad (104)$$

көрүнүшүндө жазабыз. Мында $I_n - n \times n$ - өлчөмдүү бирдик матрица б.а.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сызыктуу алгебранын белгилүү теоремасын негизинде, бир тектүү (104) системанын матрицасын аныктагычы нөлгө

$$\det(A - \lambda I_n) \equiv |A - \lambda I_n| = 0. \quad (105)$$

тең болгондо гана нөлдүк эмес чыгарылышка ээ боло алат.

Эми сызыктуу алгебранын кээ бир түшүнүктөрүн эске салалы.

18.6 Аныктама. Эгерде λ саны (105) теңдемесин канааттандырса, анда аны $n \times n$ - өлчөмдүү A матрицасын **өздүк мааниси** деп атайбыз.

Бул λ өздүк маанисине туура келген (104) системанын нөлдүк эмес чыгарылышы болгон V вектору, $n \times n$ - өлчөмдүү A матрицасын λ өздүк маанисине туура келген **өздүк вектору** деп аталат. Ал эми (105) теңдеме $n \times n$ - өлчөмдүү A матрицасын **мүнөздөгүч теңдемеси** деп аталат.

Бул (105) мүнөздөгүч теңдемени

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (106)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Аныктагычты эсептөө эрежесин эске алып, (106) мүнөздөгүч теңдемени λ га карата n – даражадагы алгебралык (полином) теңдеме түрүндө жазабыз

$$(-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0. \quad (107)$$

Алгебранын фундаменталдык теоремасын негизинде (107) теңдеме комплекстүү сандардын көптүгүндө n тамырга ээ болот. Мындан

$n \times n$ - өлчөмдүү A матрицанын n өздүк мааниге ээ болору келип чыгат. Мында A матрицанын элементтери чыныгы сандар болгонуна

карабастан, бул матрицанын өздүк маанилери жана өздүк векторлору комплекстик болушу да мүмкүн.

λ өздүк маанисине туура келген A матрицасын V өздүк вектору (104) алгебралык теңдемелер системасынан табылат.

Андан кийин $X(t) = Ve^{\lambda t}$ формуласынан, бир тектүү (102) системанын чыгарылышын табууга болот. Ошентип төмөндөгү теорема далилденди.

18.13 Теорема. *Эгерде λ саны, $n \times n$ - өлчөмдүү A – турактуу матрицанын өздүк мааниси болсо жана бул λ санына туура келген A матрицасын өздүк вектору V болсо, анда*

$$X(t) = Ve^{\lambda t}$$

вектор – функциясы (102) системанын нөлдүк эмес чыгарылышы болот.

Берилген бир тектүү (102) системаны чыгаруунун бул усулу – өздүк маанилер ыкмасы же Эйлердин ыкмасы деп аталат.

Бул ыкма менен бир тектүү (102) системаны чыгаруунун схемасы төмөнкүдөй:

1) Биз (106) мүнөздөөчү теңдемени чыгарып, A матрицанын өздүк маанилери $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ дерди табабыз.

2) Бул өздүк маанилерди (104) системага коюп, андан кийин (104) системаны v_1, v_2, \dots, v_n белгисиздерине карата чыгарып, бул өздүк маанилерге туура келген A матрицанын сызыктуу көз каранды эмес n өздүк векторлорун табабыз.

3) 2 – кадам ар дайым мүмкүн эмес, бирок мүмкүн болгондо төмөндөгү вектор – функциялар

$$\bar{X}_1(t) = \bar{V}_1 e^{\lambda_1 t}, \bar{X}_2(t) = \bar{V}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \bar{X}_n(t) = \bar{V}_n e^{\lambda_n t}$$

бир тектүү (102) системанын сызыктуу көз каранды эмес n чыгарылышы болот. Демек, бул учурда

$$X(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) + \dots + C_n \bar{X}_n(t)$$

вектор – функциясы бир тектүү (102) системанын жалпы чыгарылышы болот. Мында C_1, C_2, \dots, C_n – каалаган турактуу сандар.

18.8.8 Өздүк маанилердин көрүнүштөрүнө жараша чыгарылыштарды жазуу

1. Өздүк маанилери ар түрдүү чыныгы сандар болгон учур

Айталы, $n \times n$ - өлчөмдүү A – турактуу матрицасын элементтери чыныгы сандар жана анын өздүк маанилери да $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ар түрдүү чыныгы сандар болсун дейли. Бул учурда бир тектүү (102) системанын жалпы чыгарылышы төмөндөгү формула менен аныкталат:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i V_i e^{\lambda_i t} \quad (108)$$

Мында V_i – вектору, A – матрицасын $\lambda = \lambda_i$ өздүк маанисине туура келген өздүк вектор ($i = 1, 2, \dots, n$), б.а. $(A - \lambda_i I_n) V_i = 0$,

C_1, C_2, \dots, C_n – каалаган турактуу сандар. Бул учурда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ өздүк маанилери жөнөкөй өздүк маанилер деп аталышат.

Мисал.

$$б) \begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2, \\ x_2' = 3x_1 - x_2, \end{cases}$$

бир тектүү теңдемелер системасын жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Бул система үчүн

$$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

болгондуктан, мүнөздөгүч теңдеме

$$(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0 \text{ көрүнүштө жазылат, анткени}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 =$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 5).$$

Мүнөздөгүч тендемеден ар түрдүү $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$ чыныгы өздүк маанилерин табабыз.

A матрицасын өздүк векторлору $(A - \lambda I_2) V = 0$, б.а.

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

системасынан табылат.

1) $\lambda = \lambda_1 = -2$ учурунда $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ деп алып, акыркы системаны

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{көрүнүштө жазып, } A - \lambda_1 I_2 \text{ матрицасын рангы}$$

$\text{rang} (A - \lambda_1 I_2) = \text{rang} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$ болгондуктан, анын бир чечими

эркин тандалып, экинчиси ага жараша же көз каранды абалда табылат. Ошондуктан $a = 1$ деп алып, системанын биринчи жолчосунан

$$6a + 2b = 0 \Leftrightarrow b = -3a = -3 \text{ болорун көрөбүз.}$$

Демек $\lambda_1 = -2$ өздүк мааниге туура келген өздүк вектор

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

көрүнүштө табылат.

ЭСКЕРТҮҮ. Эгерде $a = 1$, $b = -3$ ордуна

$a = C$, $b = -3C$ чыгарылышын алсак, анда

$$V_1 = \begin{pmatrix} C \\ -3C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

болот жана

$$\bar{X}_1(t) = C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

берилген системанын чыгарылышы болот.

2) $\lambda = \lambda_2 = 5$ учурунда $(A - \lambda I_2) V = 0$ алгебралык теңдемелер системасынан

$$\begin{cases} -a + 2b = 0, \\ 3a - 6b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2b \text{ туюнтуусу}$$

келип чыгат. Мындан $b = 1$ деп алсак, анда $a = 2$ болот. Демек $\lambda_2 = 5$ өздүк мааниге туура келген өздүк векторду

көрүнүштө $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ жазууга болот.

Эки өздүк маанилер жана өздүк векторлор төмөндөгүдөй эки чыгарылышты аныктайт:

$$\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \bar{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Бул эки чыгарылыш сызыктуу көз каранды эмес, себеби алардын Вронскианы

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t} \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ нөлдөн айырмалуу.}$$

Демек

$$x(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

берилген бир тектүү системанын жалпы чыгарылышы болот. Мындан белгисиз функцияларды

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{5t}. \\ x_2(t) = -3C_1 e^{-2t} + C_2 e^{5t} \end{cases}$$

көрүнүштө туюнтууга болот. ◀

2. Өздүк мааниси комплекстүү сан болгон учур

Айталы, элементтери чыныгы сандар болгон $A - (n \times n)$ - матрицасын өздүк маанилерин арасында комплекстик $\lambda = p + iq$ саны болсун дейли жана ага

$$v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = a + ib$$

комплекстик өздүк вектору туура келсин, б.а.

$$(A - \lambda I_n) V = 0 \quad (109)$$

теңдештиги орун алсын. Анда $\lambda = p + iq$ санын түйүндөшү

$\bar{\lambda} = p - iq$ да A - матрицасын өздүк мааниси болот жана

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ a_2 - ib_2 \\ \dots \\ a_n - ib_n \end{pmatrix} = a - ib - \text{вектору } \bar{\lambda} \text{ га туура келген } A - \text{ матрицасын}$$

өздүк вектору болот. Чындыгында эле (109) теңдештиктен,

$$0 = (A - \lambda I_n) V = (\bar{A} - \bar{\lambda} I_n) \bar{V} = (A - \bar{\lambda} I_n) \bar{V}$$

экендигин алабыз. Демек,

$$X(t) = V e^{\lambda t} = V e^{(p+iq)t} = (a + ib) e^{pt} (\cos qt + i \sin qt)$$

комплекстик функциясы λ га жана V га туура келген бир тектүү (102) системанын чыгарылышы болот. Кашааларды ачып, чыгарылышты

$$X(t) = e^{pt} (a \cos qt - b \sin qt) + i e^{pt} (b \cos qt + a \sin qt) \quad (110)$$

көрүнүшкө келтиребиз. Эми

$$X_1(t) = \text{Re } X(t) = e^{pt} (a \cos qt - b \sin qt),$$

$$X_2(t) = \text{Im } X(t) = e^{pt} (a \sin qt + b \cos qt) \quad (111)$$

белгилөөрүн киргизсек, анда

$$X(t) = X_1(t) + i X_2(t) \quad (112)$$

болот. Мындан $\bar{\lambda}$ га, \bar{V} га туура келген бир тектүү (102) системанын чыгарылышын (112) ге түйүндөш катарында эсептелген

$$\bar{X}(t) = X_1(t) - i X_2(t)$$

комплексдик вектор – функция көрүнүштө жазууга болорун көрөбүз. Чынында эле, бир тектүү (102) системасын

$$X' = A X \Leftrightarrow (X'_1 - A X_1) + i(X'_2 - A X_2) = 0$$

түрүндө жазып, комплекстүү $X(t)$ чыгарылышын чыныгы бөлүгү $X_1(t) = \operatorname{Re} X(t)$ жана жалган бөлүгү $X_2(t) = \operatorname{Im} X(t)$ бир тектүү (102) системанын чыгарылыштары болорун көрөбүз. Ал чыгарылыштар (111) формула менен аныкталат жана сызыктуу көз каранды эмес болушат.

Мисал.

$$7) \begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2, \end{cases}$$

бир тектүү системасын жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Бул система үчүн

$$n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

жана мүнөздөгүч теңдеме

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 + 9 = 0 \quad \text{көрүнүштө болот.}$$

Мындан $\lambda = 4 - 3i$ жана $\bar{\lambda} = 4 + 3i$ сандары A - матрицанын комплексдик өздүк маанилери экендигин билебиз. Эми $\lambda = 4 - 3i$ санын $(A - \lambda I_2) V = 0$ теңдемесине коюп,

$$[A - (4 - 3i) I_2] V = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

теңдемелер системасын алабыз, мында $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Бул системаны
$$\begin{cases} i3v_1 - 3v_2 = 0, \\ 3v_1 + 3v_2 i = 0 \end{cases}$$

көрүнүштө жазып, ар бир жолчосун үчкө бөлгөндөн кийин

$$\begin{cases} i v_1 - v_2 = 0, \\ v_1 + v_2 i = 0 \end{cases}$$

чыгарып, $v_1 = 1$ жана $v_2 = i$ сандары бул системанын чыгарылыштарын

табабыз. Демек $V = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ вектору $\lambda = 4 - 3i$ комплекстик өздүк санына

туура келген комплекстик өздүк вектор болот. Анда, $X(t) = V e^{\lambda t}$ берилген системанын комплекстик чыгарылышы болот.

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{4t} (\cos 3t - i \sin 3t) = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ i \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$$

Мындан

$$\begin{cases} X_1(t) = \operatorname{Re} X(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \\ X_2(t) = \operatorname{Im} X(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Демек, берилген бир тектүү системанын жалпы чыгарылышы

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t \\ C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t \end{pmatrix}$$

болот. Бул жалпы чыгарылыш скалярдык формада төмөндөгүдөй жазылат:

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{4t} (C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t), \\ X_2(t) = e^{4t} (C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t). \end{cases} \blacktriangleleft$$

3. Кайталануучу (эселүү) өздүк маанилер болгон учур

Элементтери чыныгы сандар болгон $A - n \times n$ - матрицанын өздүк маанилерин арасында k жолу ($k > 0$) кайталануучу (эселүү) λ_m өздүк мааниси болсун дейли.

Биринчи учурда бул λ_m өздүк мааниге k сандагы сызыктуу көз карандысыз $\bar{V}_{m_1}, \bar{V}_{m_2}, \dots, \bar{V}_{m_k}$ өздүк векторлору туура келиши мүмкүн. Бул учурда,

$$\bar{X}_{m_1} = \bar{V}_{m_1} e^{\lambda_m t}, \bar{X}_{m_2} = \bar{V}_{m_2} e^{\lambda_m t}, \dots, \bar{X}_{m_k} = \bar{V}_{m_k} e^{\lambda_m t}$$

вектор – функциялары бир тектүү (102) системанын k сандагы сызыктуу көз карандысыз чыгарылыштары болот.

Бул учурда k жолу кайталануучу λ_m өздүк маанисин, k жолу кайталануучу толук өздүк маани деп айтабыз.

Мында да (102) системанын жалпы чыгарылышы, бул системанын n сызыктуу көз карандысыз чыгарылыштарын сызыктуу комбинациясы болот.

Мисал.

$$8) X' = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} X$$

системасын жалпы чыгарылышын тапкыла.

► Мында $n = 3$,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) [(9 - \lambda)(-1 - \lambda) + 24] =$$

$= (3 - \lambda) (15 - 8\lambda - \lambda^2) = (5 - \lambda)(3 - \lambda)^2$ болгондуктан, мүнөздөгүч теңдеме

$(5 - \lambda)(3 - \lambda)^2 = 0$ көрүнүштө болот.

Демек, A – матрицасы $\lambda_1 = 5$ жөнөкөй өздүк мааниге жана 2 – эселүү

$\lambda_2 = 3$ өздүк мааниге ээ болот.

1) $\lambda = \lambda_1 = 5$ санын $(A - \lambda I_3) V = 0$ теңдемесин коюп, төмөнкү системаны алабыз:

$$(A - 5 I_3) V = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ же}$$

$$\begin{cases} 4v_1 + 4v_2 = 0, \\ -6v_1 - 6v_2 = 0, \\ 6v_1 + 4v_2 - 2v_3 = 0. \end{cases}$$

Системанын биринчи жана экинчи жолчолорунан $v_2 = -v_1$ экендигин алабыз. Бул маанилерди үчүнчү жолчого коюп, $v_3 = v_1$ болорун көрөбүз. Эми $v_1 = 1$ деп эркин тандасак, анда $v_2 = -1$, $v_3 = 1$ болот.

Демек $\bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ вектору, $\lambda_1 = 5$ өздүк маанисине туура келген

өздүк вектор болот.

2) $\lambda = \lambda_2 = 3$ эки жолу кайталануучу өздүк маанисин

$(A - \lambda I_2) V = 0$ теңдемесине коюп,

$$(A - 3 I_3) V = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

системасын алабыз. Бул система $6v_1 + 4v_2 = 0$ теңдемесине эквиваленттүү. Бул теңдеме эки сызыктуу көз каранды эмес,

$\bar{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ жана $\bar{V}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ чыгарылыштарына ээ болот. Мындан,

берилген системанын жалпы чыгарылышын

$$x(t) = C_1 \bar{V}_1 e^{5t} + C_2 \bar{V}_2 e^{3t} + C_3 \bar{V}_3 e^{3t} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t},$$

көрүнүшүндө табабыз. Бул жалпы чыгарылыш скалярдык формада төмөндөгүдөй жазылат:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{5t} + 2e^{3t}, \\ x_2(t) = -C_1 e^{5t} - 3C_3 e^{3t}, \\ x_3(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Экинчи учурда, k эселүү λ_m өздүк маанисине сызыктуу көз каранды эмес s өздүк вектор туура келиши мүмкүн. Мында $1 \leq s < k$. Бул учурда жалпы өздүк векторлордун саны n санынан аз болот. Демек, бир тектүү (102) системанын жалпы чыгарылышын мурдагыдай таба албайбыз. Бул учурга биз токтолбойбуз.

9. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү берилген функциялардын берилген дифференциалдык теңдемелер системасын баштапкы шартты канааттандырган чыгарылышы экендигин көрсөткүлө (114 - 120)

$$114. \begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0, & x(t) = e^{3t} - e^{-t}, \\ y' = 2x + y. & y(0) = 2, & y(t) = e^{3t} + e^{-t}. \end{cases}$$

$$115. \begin{cases} x' = 2x + 3y, & x(0) = 1, & x(t) = e^{-t}, \\ y' = 2x + y. & y(0) = -1, & y(t) = -e^{-t}. \end{cases}$$

$$116. \begin{cases} x' = 3x + 4y, & x(0) = 1 & x(t) = \frac{1}{7}(8e^{6t} - e^{-t}), \\ y' = 3x + 2y, & y(0) = 1, & y(t) = \frac{1}{7}(6e^{6t} + e^{-t}). \end{cases}$$

$$117. \begin{cases} x' = 9x + 5y, & x(0) = 1 & x(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t}, \\ y' = -6x - 2y, & y(0) = 0, & y(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}. \end{cases}$$

$$118. \begin{cases} x' = 2x - 5y, & x(0) = 2, \\ y' = 4x - 2y, & y(0) = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos 4t - \frac{11}{4} \sin 4t, \\ y(t) = 3 \cos 4t + \frac{1}{2} \sin 4t, \end{cases}$$

$$119. \begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y, & y(0) = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = -4e^t \sin 2t, \\ y(t) = 4e^t \cos 2t. \end{cases}$$

$$120. \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = (t+2)e^{2t}, \\ y(t) = (t+1)e^{2t}. \end{cases}$$

Төмөндөгү берилген $A(t)$ жана $B(t)$ матрица функциялары үчүн $(AB)' = A'B + AB'$ дифференцирлөө эрежесин аткарыларын көрсөткүлө (121 – 122)

$$121. A(t) = \begin{pmatrix} t & 2t-1 \\ t^3 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. B(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 1+t \\ 3t^2 & 4t^3 \end{pmatrix},$$

$$122. A(t) = \begin{pmatrix} e^t & t & t^2 \\ -t & 0 & 2 \\ 8t & -1 & t^3 \end{pmatrix}. B(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Төмөндөгү системаларды $x' = P(t)x + f(t)$ матрица түрүндө жазгыла (123 – 128).

$$123. \begin{cases} x' = -3y, \\ y' = 3x \end{cases}$$

$$124. \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

$$125. \begin{cases} x' = 2x + 4y + 3e^t, \\ y' = 5x - y - t^2. \end{cases}$$

$$126. \begin{cases} x' = tx - e^t y + \cos t, \\ y' = e^{-t} x + t^2 y - \sin t. \end{cases}$$

$$127. \begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x + y + 2z, \\ z' = 5y - 7z. \end{cases}$$

$$128. \begin{cases} x' = 3x - 4y + z + t, \\ y' = x - 3z + t^2, \\ z' = 6y - 7z + t^3. \end{cases}$$

Төмөндөгү берилген вектор- функциялардын берилген системанын чыгарылышы экендигин текшергиле (129 – 135)

$$129. x' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$$130. x' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

$$131. x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$132. x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

$$133. x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$134. x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$135. x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Төмөндөгү системалардын жалпы чыгарылышын өздүк маани методу менен чыгаргыла (136 - 149)

$$136. \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$137. \begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2, \\ x_2' = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$138. \begin{cases} x_1' = -3x_1 + 4x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

$$139. \begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2, \\ x_2' = 6x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$140. \begin{cases} x_1' = 6x_1 - 7x_2, \\ x_2' = x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

$$141. \begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2, \\ x_2' = x_1 - x_2. \end{cases}$$

$$142. \begin{cases} x_1' = x_1 - 5x_2, \\ x_2' = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

$$143. \begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2, \\ x_2' = 4x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

$$144. \begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3, \\ x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3. \end{cases}$$

$$145. \begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ x_2' = 2x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 7x_3. \end{cases}$$

$$146. \begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + 4x_2 + x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 4x_3. \end{cases}$$

$$147. \begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_3, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

$$148. x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} x,$$

$$149. x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Төмөндөгү Кошинин маселелерин чыгарылышын тапкыла (150 – 156).

$$150. \begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

$$151. \begin{cases} x_1' = 9x_1 + 5x_2, \\ x_2' = -6x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1.$$

$$x_1(0) = 1. \quad x_2(0) = 0.$$

$$152. \begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$153. \begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2, \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 4.$$

$$x_1(0) = 2. \quad x_2(0) = 3,$$

$$154. \begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_3, \\ x_2' = 9x_1 - x_2 + 2x_3, \\ x_3' = -9x_1 + 4x_2 - x_3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0, \\ x_3(0) &= 17. \end{aligned}$$

$$155. \begin{cases} x_1' = -k_1 x_1, \\ x_2' = k_1 x_1 - k_2 x_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 15, \\ x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Мында k_1, k_2 – турактуу сандар.

$$156. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ матрицанын өздүк сандары } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -6,$$

$\lambda_3 = 10, \lambda_4 = 15$ экендигин белгилүү.

$$x' = Ax, \quad x(0) = 3, \quad x_2(0) = x_3(0) = 1. \quad x_4(0) = 3$$

маселесин чыгаргыла.

Төмөндөгү бир тектүү эмес системалардын чыгарылыштарын вариация методу менен (157 - 169) чыгаргыла.

$$157. \begin{cases} x' = x + y + e^t, \\ y' = x + y - e^t. \end{cases}$$

$$158. \begin{cases} x' = -y + \sin t, \\ y' = x + \cos t. \end{cases}$$

$$159. \begin{cases} x' = y - x + e^t, \\ y' = x - y + e^t. \end{cases}$$

$$160. \begin{cases} x' + y = t^2, \\ y' - x = t. \end{cases}$$

$$161. \begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

$$162. \begin{cases} x' = 2y - 5x + e^t, \\ y' = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

$$163. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x + e^{-t}. \end{cases}$$

$$164. \begin{cases} x' = 4x + 2y + t, \\ y' = -3x - y + 2, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

$$165. \begin{cases} x' = 4x + y + e^t, \\ y' = -2x + y, \end{cases}$$

$$166. \begin{cases} x' = -3x + 2y + e^{4t}, \\ y' = -3x + 4y + e^{-t}, \end{cases}$$

$$y(0) = y(0) = 0.$$

$$x(0) = 1; \quad y(0) = 0.$$

$$167. \quad x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

$$168. \quad x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

$$169. \quad x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

КАЙТАЛОО ҮЧҮН:

I – МАЦЕЈЕЈЕР

1. $x'' + x' - 6x = e^{2t}$, $x(0) = 2, x'(0) = 1$,
2. $x'' - 3x' - 4x = \sin t$, $x(0) = 0, x'(0) = -1$,
3. $x'' + 4x' + 5x = t$, $x(0) = 1, x'(0) = -1$,
4. $x'' + 2x' + 10x = \cos 2t$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$,
5. $x'' + 5x' + 4x = e^t$, $x(0) = 0, x'(0) = 2$
6. $2x'' + x' - 3x = \sin 2t$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$
7. $x'' + 3x' - 10x = te^t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$,
8. $x'' + x' - 2x = t + 1$, $x(0) = 2, x'(0) = -1$,
9. $x'' + 4x' + 4x = \sin 2t$, $x(0) = 1, x'(0) = 2$,
10. $x'' - 2x' + 5x = 5t$, $x(0) = 1, x'(0) = 1$,
11. $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$, $x(0) = 1, x'(0) = -1$,
12. $x'' + 6x' + 10x = 1$, $x(0) = 2, x'(0) = -2$,
13. $x'' + 5x' + 6x = 6t$, $x(0) = 2, x'(0) = 0$,
14. $x'' + 2x' + x = te^t$, $x(0) = 1, x'(0) = -1$,
15. $x'' - x' - 6x = e^{2t}$, $x(0) = 3, x'(0) = 1$,
16. $x'' + 4x' + 3x = e^{-t}$, $x(0) = 0, x'(0) = 3$,
17. $x'' + x' - 2x = 2\sin 2t$, $x(0) = 2, x'(0) = 0$,
18. $x'' + 4x' = \cos t$, $x(0) = 1, x'(0) = -1$,
19. $x'' + 4x = te^t$, $x(0) = 1, x'(0) = 1$,
20. $x'' - 4x = 2e^{-2t}$, $x(0) = 2, x'(0) = 1$,
21. $x'' + 2x' + x = \cos 2t$, $x(0) = -1, x'(0) = 2$,
22. $4x'' + x = t$, $x(0) = 2, x'(0) = -2$,
23. $x'' + x' = e^{-t}$, $x(0) = 1, x'(0) = -1$,

$$24. x''+2x' = \cos 2t, \quad x(0) = -1, x'(0) = -1,$$

$$25. 2x''+x' = \sin t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 3,$$

$$26. x''+4x' = 2te^t, \quad x(0) = 2, x'(0) = 0,$$

$$27. x''-2x'+2x = \sin 2t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1,$$

$$28. x''+2x' = \cos t, \quad x(0) = -1, x'(0) = -1,$$

$$29. x''+ 6x'+9x = e^{-3t}, \quad x(0) = 2, x'(0) = 2,$$

$$30. x''+5x'+4x = e^{-t}, \quad x(0) = 3, x'(0) = 0,$$

I – МАСЕЛЕЛЕРДИН ЖООПТОРУ:

$$1. x = \frac{4}{5} e^{-3t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{29}{20} e^{2t}$$

$$2. x = \frac{3}{34} \cos t - \frac{5}{34} \sin t + \frac{1}{10} e^{-t} - \frac{16}{85} e^{4t}$$

$$3. x = -\frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + e^{-2t} \left(\frac{29}{25} \cos t + \frac{28}{25} \sin t \right)$$

$$4. x = \frac{3}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \sin 2t - \frac{1}{26} e^{-t} (3 \cos 3t + \frac{7}{3} \sin 3t)$$

$$5. x = \frac{1}{10} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{3}{5} e^{-4t}$$

$$6. x = \frac{2}{125} \cos 2t - \frac{11}{125} \sin 2t + \frac{2}{25} e^t - \frac{8}{125} e^{\frac{3}{2}t}$$

$$7. x = \frac{5}{36} e^t - \frac{1}{6} t e^t + \frac{2}{7} e^{2t} - \frac{37}{252} e^{-5t}$$

$$8. x = -\frac{t}{2} + \frac{1}{12} + \frac{5}{3} e^t + \frac{13}{12} e^{-2t}$$

$$9. x = -\frac{1}{8} \cos 2t + \left(\frac{17}{4}t + \frac{9}{8} \right) e^{-2t}$$

$$10. x = t + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^t \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)$$

$$11. x = (t - 2)e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$12. x = \frac{1}{10} [1 + e^{-3t} (19 \cos t + 37 \sin t)]$$

$$13. x = t - \frac{5}{6} + \frac{15}{2}e^{-2t} - \frac{14}{3}e^{-3t}$$

$$14. x = e^{-t} \left(1 + \frac{1}{6}t^3 \right)$$

$$15. x = \frac{8}{5}e^{3t} + \frac{33}{20}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$16. x = \frac{1}{4} [(2t + 5)e^{-t} - 5e^{-3t}]$$

$$17. x = \frac{8}{5}e^t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{3}{10} \sin 2t$$

$$18. x = 1 + \frac{1}{17} (4e^{-4t} - 4 \cos t - \sin t)$$

$$19. x = \frac{1}{25} [27 \cos 2t + 11 \sin 2t + (5t - 2)e^t]$$

$$20. x = \frac{1}{8} [11e^{2t} + (5 - 4t)e^{-2t}]$$

$$21. x = \frac{1}{25} [(20t - 22)e^{-t} - 3 \cos 2t + 4 \sin 2t]$$

$$22. x = 2 \cos \frac{t}{2} - 6 \sin \frac{t}{2} + t$$

$$23. x = -2 + \frac{8}{3}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}e^{-t}$$

$$24. x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{8} (5e^{-2t} - \cos 2t + \sin 2t)$$

$$25. x = 8 - \frac{1}{5} (34e^{-\frac{t}{2}} + \cos t + 2\sin t)$$

$$26. x = \frac{5}{2} + \frac{10t-12}{25} e^t - \frac{1}{50} e^{-4t}$$

$$27. x = \frac{1}{10} (2\cos 2t - \sin 2t) + \frac{1}{5} e^t (7\sin t - \cos t)$$

$$28. x = -\frac{3}{2} + \frac{7}{10} e^{-2t} + \frac{1}{5} (2\sin t - \cos t)$$

$$29. x = \left(\frac{1}{2} t^2 + 8t + 2 \right) e^{-3t}$$

$$30. x = \frac{1}{9} [(3t+35)e^{-t} - 8e^{-4t}]$$

II – МАСЕЛЕЛЕР

Баштапкы шарттары менен берилген дифференциалдык теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$1. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + e^t \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 + t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 + e^t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 4x_2 - 2t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 6x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 - e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 4x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 3x_2 - e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 6x_1 - 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + e^t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + e^{2t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + 2x_2 + e^{2t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + e^{-2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + \sin t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + \cos t, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + te^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + e^{-t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 3, \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + 2e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - 2t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2 + 2t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 3x_2 + 2t, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + \sin t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 + 2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = -1, \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 4x_2 + e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 4x_2 + 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 2, \\ x_2(0) = 3, \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 5x_2 + e^{2t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

II – МАСЕЛЕЛЕРДИН ЖООПТОРУ:

$$1. x_1 = \frac{1}{9} [(3t-14)e^t + 14e^{4t}], x_2 = \frac{1}{9} (11-3t)e^t + 7e^{4t}.$$

$$2. x_1 = \frac{1}{36} [6t + 5 - 45e^{2t} + 76e^{3t}], x_2 = -\frac{1}{18} [12t + 7 - 45e^{2t} + 38e^{3t}].$$

$$3. x_1 = \frac{1}{12} [32 - 11e^{3t} - 9e^{-t}], x_2 = \frac{1}{12} [16 + 11e^{3t} - 3e^{-t}].$$

$$4. x_1 = \frac{1}{12} [-4 - 6e^t + 15e^{-t} + 7e^{3t}], x_2 = \frac{1}{12} [8 - 15e^{-t} + 7e^{3t}]$$

$$5. x_1 = \frac{129}{128} (1 - e^{8t}) + \frac{t}{16} - \frac{3t^2}{4}, x_2 = \frac{125}{126} + \frac{387}{256} e^{8t} - \frac{3t^2}{8} - \frac{3t}{32}.$$

$$6. x_6 = \frac{1}{4} [1 + 7\cos 2t + 6\sin 2t], x_2 = \frac{1}{4} [5 - 5\cos 2t + 20\sin 2t].$$

$$7. x_1 = \frac{1}{4} [(1-2t)e^{-t} - e^{-3t}], x_2 = \frac{1}{4} [(3-2t)e^{-t} + e^{-3t}]$$

$$8. x_1 = \frac{1}{30} [24 + 25e^{-t} + 11e^{5t}], x_2 = -\frac{1}{6} [6 - 11e^{5t} + 5e^{-t}].$$

$$9. x_1 = \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} (6t + 5)e^t, x_2 = -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} (2t + 1)e^t$$

$$10. x_1 = 0.6t - 0.28 + 2.28e^{5t}, x_2 = 1.2t - 0.76 + 0.76e^{5t}.$$

$$11. x_1 = \frac{4}{5} - \frac{4t+1}{16} e^t + \frac{21}{80} e^{5t}, x_2 = -\frac{3}{5} + \frac{4t-3}{16} e^t + \frac{63}{80} e^{5t}.$$

$$12. x_1 = \frac{2}{5} e^{-t} + \frac{2}{5} e^{2t} (3\sin t - \cos t),$$

$$x_2 = \frac{2}{5} e^{-t} + \frac{4}{5} e^{2t} (\cos t + 2\sin t).$$

$$13. x_1 = 3e^{2t} - e^t (4t + 3), x_2 = 4e^{2t} - 2e^t (4t + 1).$$

$$14. x_1 = 3e^{-t} - 3e^{-2t}, x_2 = 3e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

$$15. x_1 = \frac{1}{9}[3t-5 + 9e^{-t} - 4e^{3t}], x_2 = \frac{1}{9}[12t - 8 + 18e^{-t} + 8e^{3t}].$$

$$16. x_1 = \frac{1}{20}[-4e^{-2t} + 15e^{-t} + 9e^{3t}], x_2 = \frac{1}{10}[6e^{-2t} + 15e^{-t} - 9e^{3t}].$$

$$17. x_1 = \frac{1}{27}[9t^2 - 3t + 19e^{3t} + 35], x_2 = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}t^2 + t\right) + \frac{19}{27}(1 - e^{3t}).$$

$$18. x_1 = \frac{1}{20}[5e^t + e^{3t} - 6\cos t - 8\sin t], x_2 = \frac{1}{20}[5e^t - e^{3t} - 4\cos t - 2\sin t].$$

$$19. x_1 = \frac{1}{5}[\cos t + 3\sin t - e^{-2t}], x_2 = \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{5}e^{-2t}.$$

$$20. x_1 = \frac{1}{18}[-2(6t+5)e^t + 9e^{2t} + e^{4t}], x_2 = \frac{1}{18}[-2(3t+4)e^t + 9e^{2t} - e^{4t}].$$

$$21. x_1 = \frac{1}{5}(2\cos t - 31\sin t)e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-t}, x_2 = \frac{1}{10}(29\cos t + 33\sin t)e^{2t} + \frac{e^{-t}}{10}.$$

$$22. x_1 = -\frac{4}{3}e^t \sin 3t, x_2 = \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{3}e^t \cos 3t.$$

$$23. x_1 = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{16}{27}(e^{3t} - 1), x_2 = \frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{9}t + \frac{22}{27} + \frac{32}{27}e^{3t}.$$

$$24. x_1 = \frac{1}{28}[20e^{3t} - 13e^{-4t} - 7(1+t)], x_2 = \frac{1}{42}[10e^{3t} + 39e^{-4t} - 7]$$

$$25. \begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t} - \frac{11}{85}\cos t - \frac{27}{85}\sin t. \\ x_2 = \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{34}e^{4t} - \frac{6}{85}\cos t - \frac{7}{85}\sin t. \end{cases}$$

$$26. x_1 = \frac{1}{5}[5 - e^{-t} + e^{4t}], x_2 = \frac{1}{10}[-15 + 2e^{-t} + 3e^{4t}].$$

$$27. \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}[1 + e^{2t}(-\cos t + 12\sin t)]. \\ x_2 = \frac{1}{5}[-3 + e^{2t}(13\cos t - 11\sin t)]. \end{cases}$$

$$28. x_1 = \frac{1}{4}[5e^{-t} - e^{3t}], x_2 = \frac{1}{4}[e^t + 5e^{-t} + e^{3t}].$$

$$29. x_1 = (5 + 6t)e^t - 3, x_2 = (4 + 3t)e^t - 1.$$

$$30. \begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}[e^{2t} - \cos 2t + 43 \sin 2t. \\ x_2 = \frac{1}{8}[-e^{2t} + 17 \cos 2t + 9 \sin 2t]. \end{cases}$$

ХІХ ГЛАВА. ФУРЬЕНИН ЖАНА ЛАПЛАСТЫН ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮЛӨРҮ

§ 19.1 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрү 19.1.1 Фурьенин интегралдык формуласы

$[-l, l]$ кесиндисинде $T = 2l$ мезгилдүү $f(x)$ функциясына § 14.7 (3 – бөлүктө) коюлган шарттарда төмөндөгүдөй Фурьенин

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1)$$

тригонометриялык катарына ажыратууга болору белгилүү. Мында

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi\tau}{l} d\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \sin \frac{n\pi\tau}{l} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (2)$$

Эйлер – Фурьенин коэффициенттери деп аталышат.

(2) коэффициенттеринде интеграл алдына турактуу көбөйтүүчүлөр катары катышкан $\cos \frac{n\pi}{l} x$, $\sin \frac{n\pi}{l} x$ функцияларын киргизүү менен төмөндөгүдөй

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\tau}{l} d\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi\tau}{l} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

өзгөртүү киргизүү мүмкүн, анткени (2) де интегралдоо τ өзгөрүлмөсү боюнча жүргүзүлүп, x өзгөрүлмөсү турактуу параметр катары катышат. Бул учурда (1) катарын

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \left[\cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi\tau}{l} + \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi\tau}{l} \right] d\tau$$

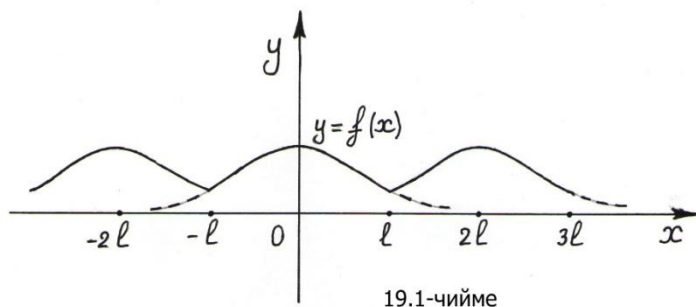
көрүнүшкө келтирип, косинустардын айырмасын формуласын колдонгондон кийин, турактуу көбөйтүүчүгө чейинки тактык менен

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi(x-\tau)}{l} d\tau \quad (3)$$

көрүнүшкө өзгөртүп жазууга болот.

(3) ажыралуусу функциянын $x \in [-l, l]$ маанилери үчүн гана туура болот. Эгерде $f(x)$ функциясы сан огунун $[-l, l]$ кесиндисине караганда узун аралыкта же болбосо бүтүндөй сан огунда аныкталып, Фурьенин катарына ажыратуу шарттарына баш ийсе, анда аны бүтүндөй сан огуна $T = 2l$ мезгилдүү функция катарында узартууга болот (19.1 – чийме). Ал эми $f(x)$ бүтүндөй сан огунда аныкталганы менен мезгилсиз функция болуп калса, анда

төмөндөгүдөй шарттардын аткарылышын талап кылуу менен (3) ажыралышын $l \rightarrow +\infty$ умтулгандагы пределин табууга аракет кылабыз:



1. Сан огунан кандай гана чектелген кесинди алсак да, анын x чекиттеринде $f(x)$ функциясы Фурьенин катарына ажыралуу шарттарына баш ийсин.

2. Бүтүндөй Ox сан огунда $f(x)$ абсолюттук интегралдануучу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = K < +\infty \quad (4)$$

Функция болсун.

Чынында эле экинчи шарт аткарылса (3) жазылышын оң жагындагы биринчи кошулуучу $l \rightarrow +\infty$ умтулганда

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau = \frac{K}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$$

нөлгө умулат. Чексиз сумма көрүнүштөгү экинчи кошулуучу $l \rightarrow +\infty$ умтулганда кандай абалда болоруна кызыгып көрөлү.

Ох огунда аралыктары $\frac{\pi}{l}$ санына барбар болгон

$$\xi_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \xi_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{\Delta\xi_n}{\pi}$$

чекиттерин алып, ушул чекиттерде (3) ажыралышын оң жагындагы экинчи кошулуучуну

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\xi_n \int_{-l}^l f(\tau) \cos[\xi_n(x - \tau)] d\tau \quad (5)$$

көрүнүштө жазууга болот. l саны жетишерлик чоң болгондо да ($l = \pm\infty$ болсо деле) интеграл абсолюттук жыйналуучу болгондуктан, акыркы сумма

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\xi_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi_n(x - \tau)] d\tau$$

туюнтмасынан аз гана айырмаланат. Ал эми акыркы туюнтманы ξ өзгөрүлмөсүнө карата аныкталган кандайдыр бир $\psi(\xi)$ функциясы

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi(x - \tau)] d\tau$$

үчүн, $(0, +\infty)$ интервалында түзүлгөн интегралдык сумма деп эсептөөгө болот. Ошондуктан (5) тен $l \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \Delta\xi_n = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0$ умтулгандагы пределге өтүү менен

$$\int_0^{+\infty} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi(x - \tau)] d\tau \quad (6)$$

интегралына ээ болобуз.

Экинчи жактан x ти турактуу деп (3) тен

$\Delta\xi_n = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \frac{1}{l} = \frac{\Delta\xi_n}{\pi}$ болорун эске алып, $l \rightarrow +\infty$ умтулгандагы пределге өтсөк

$$f(x) = 0 + \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi(x-\tau)}{l} d\tau =$$

$$= \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \xi_n \int_{-l}^l f(\tau) \cos \xi_n(x-\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi(x-\tau)] d\tau$$

келип чыгып, табылган пределдин маанисин

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi(x-\tau)] d\tau \quad (7)$$

Фурьенин интегралдык формуласы, ал эми теңдештиктин оң жагындагы интегралды **Фурьенин интегралы** деп атайбыз.

$f(x)$ функциясын (7) көрүнүштө жазуунун жетиштүү шарты:

Эгерде $f(x)$ функциясы $-\infty < x < +\infty$ аралыгында абсолюттук интегралдануучу жана көрсөтүлгөн аралыктын каалагандай $[a, b]$ кесиндисинде өзү менен кошо туундусу да чектүү сандагы чекиттерде гана I – роддогу үзүлүүгө ээ болсо, анда аны (7) көрүнүштө жазуу мүмкүн. Ал эми чектүү сандагы x_0 сыяктуу I – роддогу үзүлүү чекиттеринде интегралдын маанисин $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ санына барабар деп эсептейбиз (функциянын x_0 чекитиндеги оң жана сол жактуу пределдерин арифметикалык орточосу).

(6) менен (7) нин оң жактары барабар болгондуктан, сол жактары

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \psi(\xi) d\xi \quad (8)$$

да тең болушат.

(7) формуласын косинустардын айырмасын формуласын колдонуп

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos[\xi(x-\tau)] d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) [\cos \xi x \cos \xi \tau + \sin \xi x \sin \xi \tau] d\tau = \\
&= \int_0^{+\infty} \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau \right] \cos \xi x + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau d\tau \right] \sin \xi x \right\} d\xi = \\
&= \int_0^{+\infty} [a(\xi) \cos \xi x + b(\xi) \sin \xi x] d\xi \quad \text{же} \\
f(x) &= \int_0^{+\infty} [a(\xi) \cos \xi x + b(\xi) \sin \xi x] d\xi \quad (9)
\end{aligned}$$

көрүнүшкө өзгөртүп жазууга болот. Мында квадраттык кашаанын ичиндеги интегралдар τ өзгөрүлмөсү боюнча алынып интегралдын маанисинде ξ катышкандыктан, коэффициенттер ξ ден көз каранды функция катары алынат. Демек, Фурьенин коэффициенттерин элестеткен функциялар

$$a(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau, \quad b(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau d\tau \quad (10)$$

көрүнүштөрдө жазылышат.

Фурьенин коэффициенттери $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ маанилерине жараша дискреттик маанилерди кабыл алышкан $T = 2\pi$ мезгилдүү функциялар болушса, $a(\xi), b(\xi)$ – коэффициенттерин мезгили сакталганы менен, ξ өзгөрүлмөсүн $(-\infty, +\infty)$ арлыгында дискреттик эмес же үзгүлтүксүз (туташ) маанилеринде аныкталган функциялар болушат.

19.1.2 Фурьенин интегралын комплекстик формасы

$f(x)$ функциясын бүтүндөй Ox огунда абсолюттук интегралдануучу деп алып,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) d\tau, \quad -\infty < \xi < +\infty$$

интегралын карайлы.

Интеграл алдындагы функция $-\infty < \xi < +\infty$ аралыгында

$|f(\tau)\sin \xi(x - \tau)| \leq |f(\tau)| \cdot 1 = |f(\tau)|$ шартына баш ийгендиктен,

көрсөтүлгөн аралыкта бир калыпта жыйналат. Ошондуктан интегралдын маанисин ξ өзгөрүлмөсүнө карата үзгүлтүксүз жана так функция катарында эсептөөгө болот. Анда симметриялуу аралык боюнча эсептелген интеграл катарында

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) d\tau = 0$$

болору келип чыгат.

Экинчи жактан,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau, \quad -\infty < \xi < +\infty$$

интегралы ξ өзгөрүлмөсүнө карата жуп функция, ошондуктан

$$\int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau$$

ээ болобуз. Анда Фурьенин интегралдык формуласын

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau \quad (11)$$

көрүнүштө жазып, жогорудагы нөл санына барабар деп эсептелген

$$i \cdot 0 = i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) d\tau$$

интегралды i ге көбөйтүп, (11) теңдештигине мүчөлөп кошкондон кийин

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) [\cos \xi(x - \tau) + i \sin \xi(x - \tau)] d\tau$$

теңдештигине ээ болобуз. Эйлердин $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ формуласын колдонуп акыркы теңдештиктен комплекстик формадагы

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\xi(x-\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \quad (12)$$

Фурьенин интегралын алабыз. Бул жерде ξ өзгөрүлмөсү боюнча алынган сырткы I – роддогу өздүк эмес интегралды Коши боюнча башкы мааниде (3 – бөлүк, §13.1) түшүнөбүз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-N}^{+N} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \right) d\xi .$$

19.1.3 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрү

Айталы, Ox огун каалагандай чектүү кесиндилеринде $f(x)$ бөлүкчө – жылмакай функция болсун.

19.1 Аныктама.
$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \quad (13)$$

функциясы, $f(x)$ функциясын Фурье боюнча өзгөртүп түзүлүүсү же спектралдык функциясы деп аталат.

(13) интегралдык чагылтуусу, $(-\infty, +\infty)$ аралыгында $f(x)$ функциясын $F(\xi)$ функциясына өзгөртүп түзөт же чагылтат, ошондуктан аны **Фурьенин оператору** деп, ал эми $F(\xi)$ ни $f(x)$ тин **Фурье боюнча элеси** деп да коюшат. Интеграл алдындагы

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x}$$

функцияны Фурьенин чагылтуусун ядросу дейбиз.

Фурьенин интегралдык формуласынан (13) тү эске алып,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Фурьенин (13) кө тескери болгон

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (14)$$

өзгөртүп түзүүсүн алабыз.

Кээде Фурьенин (13) өзгөртүп түзүүсүн

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad (13^A)$$

ал эми ага тескери болгон (14) өзгөртүп түзүүсүн

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (14^A)$$

көрүнүштөрдө жазып колдонуу ыңгайлуу болот.

Ошентип, Фурьенин (13) – (13^A) чагылтуулары $f(x)$ ти $F(\xi)$ ге чагылтса, (14) – (14^A) чагылтуулары тескерисинче $F(\xi)$ ни $f(x)$ ке чагылтат.

Айрым учурларда Фурьенин $f(x)$ ти $F(\xi)$ ге өзгөртүп түзүүсүн

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad (13^B)$$

ал эми $F(\xi)$ ни $f(x)$ ке тескери өзгөртүп түзүүсүн

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (14^B)$$

көрүнүштөрдө да колдонушат. Мында $\frac{1}{2\pi}$ көбөйтүүчүсү эркин каалоого жараша (13^B) же (14^B) чагылтууларын бирөөсүнө гана көбөйтүлүп жазылат.

Мисалдар

1. Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн (чагылтуусун) колдонуп, төмөндөгү функциялардын элесин тапкыла

а). $f(x) = e^{-\gamma|x|}$, $\gamma > 0$ функциясын.

Чыгаруу. ► Берилген функцияга (13^B) формуласын колдонуп

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\xi x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos \xi x + i \sin \xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \cos \xi x dx + \\ &+ i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \sin \xi x dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\gamma|x|} \cos \xi x dx + i \cdot 0 = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \cos \xi x dx \end{aligned}$$

ээ болобуз. Мында симметриялуу аралыкта жуп жана так функциялардан интеграл алуу эрежелери колдонулду. Акыркы интегралды эки жолу бөлүктөп интегралдоо менен

$F(\xi) = \frac{2\gamma}{\xi^2 + \gamma^2}$ функциясын табабыз. ◀

б). $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } |x| \leq a, \\ 0, & \text{эгерде } |x| > a \end{cases}$ функциясын.

Чыгаруу. ►

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{\xi a} - e^{-i\xi a}}{i\xi} = \frac{2 \sin \xi a}{\xi}$$

берилген функциянын элесин табабыз. $f(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ суммалануучу (интегралдануучу) болгону менен, анын элеси болгон $F(\xi)$ функциясы көрсөтүлгөн аралыкта интегралдануучу болбой кышы мүмкүн экендигин белгилеп кетебиз. ◀

в). $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ функциясын.

Чыгаруу. ▶ (13^b) формуласын колдонуп

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{dx}{x^2+a^2} \quad (*)$$

интегралына ээ болобуз. Аны резидилер теориясын пайдаланып (4-бөлүк, §17.7) эсептейли. x өзгөрүлмөсү боюнча интеграл алынып жаткандыктан Ox чыныгы огун, борбору O чекитинде, радиусу жетишерлик чоң R болгон тегерек менен толуктайлы. Тегеректи курчап турган айлананы l дейли. Анда ξ нин белгисине жараша эки учур болушу мүмкүн:

1 – учур. $\xi > 0$ болсун, анда Ox огунун төмөнкү жарым тегерегинде, б.а. $e^{-i\xi x} \rightarrow 0$ умтулуучу бөлүгүндө жайгашкан интеграл алдындагы функциянын резидилерин суммасы (*) интегралын мааниси болот.

Аталган жарым тегеректе $\frac{e^{-i\xi x}}{x^2+a^2}$ функциясын бир гана $z_0 = -a i$ жөнөкөй полюсу бар. §17.7 деги (54) формуласы боюнча

$z = z_0$ чекити $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)}$ функциясын жөнөкөй уюлу болсо,

ресицииси $Res f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$ көрүнүштө эсептелет. Мында $\varphi(a) \neq 0$,

ал эми a чекити $g(z)$ функциясын жөнөкөй нөлү. Ал эми (§17.7) деги (60) формуласы боюнча

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^h Res f(z_k) \quad \text{болгондуктан,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \text{Res}f(z_0) = 2\pi i \cdot \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)} \quad \text{келип чыгат.}$$

Демек,

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}f(-ai) = 2\pi i \cdot \frac{\varphi(-ai)}{g'(-ai)} = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{-a\xi}}{-2ai} = -\frac{\pi e^{-a\xi}}{a} \end{aligned}$$

болот.

2 – учур. $\xi < 0$ болгондо жарым тегеректин Ox огун жогорку жарым бөлүгүндө $f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2}$ функциясын бир $z_0 = ai$ жөнөкөй полюсу жайгашкан. Анда

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}f(ai) = 2\pi i \cdot \frac{\varphi(ai)}{g'(ai)} = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{e^{a\xi}}{2ai} = \frac{\pi e^{a\xi}}{a} \quad \text{келип чыгат.} \blacktriangleleft \end{aligned}$$

г). $f(x) = e^{-ax^2}$ функциясын.

Чыгаруу. \blacktriangleright Бул учурда

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx$$

келип чыгып, интеграл алдындагы туюнтма комплекстик тегиздиктин чектелген областында өзгөчө чекиттери жок аналитикалык функция болот. Ошондуктан Кошинин 17.3 – теоремасы (4-бөлүк, §17.4) боюнча аналитикалык функциянын интегралын мааниси, интегралдоо жолунан көз каранды болбойт. Анда интегралдоо жолу болгон Ox огун, ага параллель болгон $z = x + iy$ ($y = \text{constanta}$) түзү боюнча жүргүзүүдөн интегралдын мааниси өзгөрбөйт:

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\xi(x+iy)} dx = \\
&= e^{-ay^2+\xi y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\xi x} dx = \\
&= e^{-ay^2+\xi y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\xi)} dx .
\end{aligned}$$

Эгерде y турактуусун $y = \frac{-\xi}{2a}$ көрүнүштө тандасак, анда акыркы интеграл i –жалган көбөйтүүчүсүнөн куткарылып,

$$\begin{aligned}
e^{-ay^2+\xi y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\xi)} dx &= e^{a\frac{\xi^2}{4a^2}-\frac{\xi^2}{2a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \\
&= e^{a\frac{\xi^2}{4a^2}-\frac{\xi^2}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{көрүнүштө эсептелет. Демек,}
\end{aligned}$$

$f(x) = e^{-ax^2}$ функциясын Фурье боюнча өзгөртүп түзгөндө

$F(\xi) = e^{a\frac{\xi^2}{4a^2}-\frac{\xi^2}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ функциясы келип чыгат. Эгерде $a = \frac{1}{2}$ десек,

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow F(\xi) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ болот, б.а. Фурьенин өзгөртүп түзүүсү $e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясын өзүнө өзүн чагылтат. ◀

Эгерде $f(x)$ функциясы $[0, +\infty)$ аралыгында гана аныкталган болсо, анда аны бүтүндөй Ox огуна же $(-\infty, +\infty)$ аралыгына жуп же так функциялар катарында узартып, Фурьенин косинустар же синустар боюнча өзгөртүп түзүүлөрүн курууга болот:

1. $f(x)$ жуп болсо, ага Фурьенин косинустар боюнча өзгөртүп түзүүсү деп аталган

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx \quad (15)$$

интегралдык өзгөртүп түзүүсүн колдонууга болот. Анын тескериси

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} F_c(\xi) \cos \xi x d\xi \quad (16)$$

көрүнүштө болот.

2. $f(x)$ так болсо, ага Фурьенин синустар боюнча өзгөртүп түзүүсү деп аталган

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx \quad (17)$$

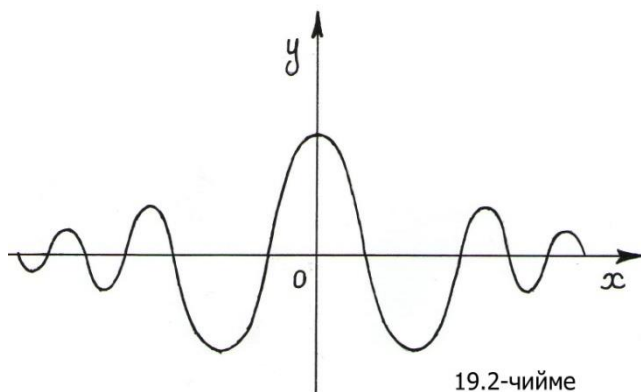
интегралдык өзгөртүп түзүүсү курулат, ал эми тескериси

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} F_s(\xi) \sin \xi x d\xi \quad (18)$$

көрүнүштө жазылат.

19.1.4 Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрүн касиеттери

Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрүн (операторун) касиеттерин кароодон мурда, Фурьенин операторун эмне үчүн үйрөнүү керек деген суроого жооп берели. Айталы кайсы бир кубулуштун жүрүшү, түзүлүү табыяты татаалыраак болгон $f(x)$ функциясы менен же ал катышкан туюнтмалар, теңдемелер аркылуу сүрөттөлсүн, ал эми $F(\xi)$ үйрөнүүгө жеңилерээк функция болсун. Эгерде $f(x)$ функциясы $|x| \rightarrow +\infty$



умтулганда нөлгө ыкчам умтулган (басандап өчүүчү) функция болсо (19.2 – чийме), анда $f(x)$ тин Фурье боюнча $F(\xi)$ – элесин изилдөө менен, баштапкы $f(x)$ функциясы жөнүндө маалыматтарды үйрөнүп, кубулуштун жүрүшү боюнча

жакындаштырылган маалыматтарды алууга болот. Ошентип Фурьенин оператору, кубулуштарды элестерине карата түзүлгөн математикалык

моделдер боюнча таанып билүүгө мүмкүнчүлүк түзгөн аппарат болуп эсептелет. Бирок, аны $f(x)$ ке көп эсе жолу колдоно берүү туура эмес жыйынтыкка алып келиши мүмкүн. Анткени ар бир чагылтуудан кийинки элестерде $f(x)$ тин баштапкы сапаттары азайып олтуруп, бир канча эсе колдонуудан кийинки элес $f(x)$ сүрөттөгөн кубулушту мүнөздөй албай калышы да мүмкүн. Ошондуктан Фурьенин операторун кайсы учурда кандай функцияларды чагылтууга колдонууга болоруна токтолобуз.

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн $L_1(-\infty, +\infty)$ символу менен белгиленген суммалануучу функциялардын мейкиндигинде, б.а.

$(-\infty, +\infty)$ аралыгында абсолюттук интегралдануучу функциялар үчүн колдонуу мүмкүнчүлүктөрү бар. Ыңгайлуулук үчүн Фурьенин (13), (13^A), (13^B) өзгөртүп түзүүлөрүн оператор катары кыскача $\Phi[f]$ символу менен белгилейли. Алардын баары тең күчтүү болушкандыктан, алардын бирине карата далилденген касиеттер баары үчүн орун алат деп эсептейбиз.

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн (13^B) көрүнүштө деп алсак,

$$\Phi[f] = F(\xi) \Leftrightarrow F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad f(x) \in L_1(-\infty, +\infty). \quad (19)$$

Фурьенин операторун касиеттери (19) теңдештигин оң жагындагы өздүк эмес интегралдын жыйналуу шарттарына негизделерин көрөбүз.

1⁰. Эгерде Фурьенин оператору $\Phi[f] = F(\xi)$, $\Phi[g] = G(\xi)$ чагылтууларын ишке ашырса, ал эми $\alpha, \beta \in R$ сандары болушса, анда

$$\Phi[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot \Phi[f] + \beta \cdot \Phi[g] \text{ теңдештиги орун алат.}$$

Фурьенин оператору сызыктуулук касиетине ээ жана ал өздүк эмес интегралдын сызыктуулук касиетинен келип чыгат.

2⁰. Эгерде $L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигинде киргизилген метрика (аралыкты ченөө эрежеси) боюнча $\{f_n(x)\}$ функцияларын удаалаштыгы жыйналуучу болсо, анда алардын Фурье боюнча

элестеринен түзүлгөн $\{F_n(\xi)\} = \{\Phi[f_n]\}$ удаалаштыгы да бүтүндөй сан огунда бир калыпта жыйналуучу болот.

► $\forall f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ функциясын нормасы деп

$$\|f(x)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \quad (20)$$

санын түшүнүп, ал эми ар кандай эки $f(x), g(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ функцияларын арасындагы аралыкты, же метриканын аксиомаларын канааттандырган ченөө эрежесин

$$\rho(f, g) = \|f(x) - g(x)\| \quad (21)$$

көрүнүштө киргизип, $L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигин (21) метрикасына карата толук метрикалык мейкиндик болорун текшерип көрүүгө болот. Анда жыйналуучу удаалаштыктын мүчөлөрү кайсы бир номерден баштап бири – биринен жетишерлик кичине гана айырмалангандыктан

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon: n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \rho(f_n, f_m) = \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алат. Мындан

$$\begin{aligned} |F_n(\xi) - F_m(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x) - f_m(x)] e^{-i\xi x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \cdot |e^{-i\xi x}| dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| dx = \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \end{aligned}$$

келип чыгып, $|F_n(\xi) - F_m(\xi)| < \varepsilon$ айырмасын да жетишерлик кичине болушу же $\{F_n(\xi)\}$ удаалаштыгын жыйналары далилденет. Табылган N_ε номери ξ ден көз каранды болбогондуктан, бир калыпта жыйналат. ◀

3⁰. Эгерде бүтүндөй $(-\infty, +\infty)$ сан огунда абсолюттук интегралдануучу болгон $f(x)$ функциясын Фурье боюнча элеси $F(\xi)$

болсо, анда $F(\xi)$ функциясы бардык $\xi \in (-\infty, +\infty)$ чекиттеринде чектелген жана үзгүлтүксүз функция болот.

Ошондой эле $|\xi| \rightarrow \infty \Rightarrow F(\xi) \rightarrow 0$ нөлгө умтулат.

► Чынында эле $F(\xi)$ нин чектелген экендиги $f(x)$ тин абсолюттук интегралдануучулугунан

$$\begin{aligned} |F(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |e^{-i\xi x}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot |\cos \xi x + i \sin \xi x| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot \sqrt{\cos^2 \xi x + \sin^2 \xi x} dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot 1 dx \leq K \end{aligned}$$

келип чыгат.

Ох сан огуна чектелген (a, b) интервалын мүнөздөөчү

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } x \in (a, b), \\ 0, & \text{эгерде } x \notin (a, b) \end{cases}$ функциясын Фурье боюнча элеси

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_a^b 1 \cdot e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{-i\xi} \int_a^b e^{-i\xi x} d(-i\xi x) = \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_a^b = \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} = \\ &= \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \quad \text{көрүнүштө эсептелип, анын үзгүлтүксүз болору жана} \\ &|\xi| \rightarrow \infty \Rightarrow F(\xi) \rightarrow 0 \text{ умтулары байкалып турат.} \end{aligned}$$

Фурьенин оператору боюнча f тен F ке чагылуу сызыктуу болгондуктан, каалагандай интервалдардын мүнөздөөчү чектүү секирикке ээ бардык функциялардын сызыктуу комбинациясынан турган функциянын да, Фурье боюнча элеси үзгүлтүксүз жана $|\xi| \rightarrow \infty$ умтулганда ыкчам нөлгө умтулган функция болору келип чыгат. Экинчи жактан, чектүү секирикке ээ функциялардын көптүгү

$L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигинде тыгыз, б.а. чектүү секирикке ээ функциялардын бардык пределдик чекиттери $L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигине таандык болушат. Андай болсо, $L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигинен алынган кайсы бир $f(x)$ функциясын, чектүү секирикке ээ болгон $\{f_n(x)\}$ функцияларын удаалаштыгынын пределдик чекити деп эсептөөгө болору жана 2^0 касиети боюнча, бул удаалаштыктын $|\xi| \rightarrow \infty$ умтулганда ыкчам нөлгө умтулган үзгүлтүксүз $F(\xi)$

функциясына бир калыпта жыйналары $\Phi[f_n] = F_n(\xi) \rightarrow F(\xi)$ келип чыгат. ◀

4⁰. Эгерде $f(x)$ функциясы $(-\infty, +\infty)$ сан огунун ар бир чектелген интервалында абсолюттук чоңдугу боюнча үзгүлтүксүз жана анын туундусу бүтүндөй $(-\infty, +\infty)$ сан огунда суммалануучу, б.а. $f'(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигине таандык болсо, анда

$$\Phi[f'] = i \xi \Phi[f] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i \xi x} dx = i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i \xi x} dx = i \xi F(\xi) = i \xi \Phi[f] \quad (22)$$

теңдештиги орун алат.

Ошентип касиетте көрсөтүлгөн шарттарга баш ийген функциядан туунду алуу, анын Фурье боюнча элесин $i \xi$ ге көбөйтүп коюу менен эсептелет.

► Чынында эле каалагандай чектелген интервалда абсолюттук үзгүлтүксүз функцияны

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

көрүнүштө жазууга болот. $f'(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ мындан $f'(x)$ тин абсолюттук интегралдануучу жана $x \rightarrow \pm\infty$ умтулганда чектүү нөл санына барабар пределге ээ болору келип чыгат. Эгерде бул пределдин мааниси нөл болбосо, анда $f(x)$ бүтүндөй сан огунда интегралдануучу болбой калышы мүмкүн эле. Ушул себепти эске алуу менен бөлүктөп интегралдоо усулун колдонуп,

$$\begin{aligned}\Phi[f'] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{-i\xi x}, du = -i\xi e^{-i\xi x} dx \\ dv = f'(x)dx, v = f(x) \end{array} \right| = \\ &= f(x)e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = 0 + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \Phi[f]\end{aligned}$$

(22) теңдештигин туура экендигине ишенебиз. ◀

(22) эрежесин математикалык индукция усулу менен жалпылап, эгерде ар бир чектелген интервалда $f(x)$ функциясын $(k-1)$ – тартиптеги $f^{(k-1)}(x)$ туундусу менен кошо абсолюттук үзгүлтүксүз жана

$f, f', \dots, f^{(k)} \in L_1(-\infty, +\infty)$ болушса, анда

$$\begin{aligned}\Phi[f^{(k)}] &= (i\xi)^k \Phi[f] \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Phi[f^{(k)}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^k F(\xi) \quad (23)\end{aligned}$$

теңдештиги орун аларын көрсөтүүгө болот.

5⁰. Эгерде $f^{(k)}(x)$ абсолюттук интегралдануучу болсо, анда

$$\xi \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad |\Phi[f]| = \frac{|\Phi[f^{(k)}]|}{|\xi|^k} \rightarrow 0, \text{ б.а.} \quad (24)$$

$F[f]$ функциясы чексиздикте $\frac{1}{|\xi|^k}$ ге караганда тезирээк нөлгө умтулат.

Ошентип L_1 мейкиндигинде $f(x)$ тин канчалык чоң тартиптеги туундулары жашаса, анда анын Фурье боюнча элеси ошончо эсе нөлгө тезирээк умтулат. Функциянын туундусун жашашы анын графигин жылмакайлык (жаныма жүргүзүүгө мүмкүнчүлүк) деңгээлин көрсөткөндүктөн, (24) төн $f(x)$ тин жылмакайлык деңгээли менен анын Фурье боюнча элесинин арасындагы жылмакайлык деңгээлди салыштырууга болот.

▶ Чынында эле (23) теңдештигин $(i\xi)^k$ ге бөлүп жиберип, 3^0 – боюнча чексиздикте $F(\xi)$ нөлгө ыкчам умтуларын эске алсак, анда

$f^{(k)}(x)$ абсолюттук интегралдануучулугунан (24) теңдештиги келип чыгат. ◀

6⁰. Эгерде $f(x)$ функциясын экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусу жашап, ал $L_1(-\infty, +\infty)$ мейкиндигине таандык болсо, анда $\Phi[f]$ абсолюттук интегралдануучу функция болот.

◀ 5⁰ – касиет боюнча $f(x)$ тин Фурье боюнча $\Phi[f]$ – элеси $\frac{1}{|\xi|^2}$ ке караганда ылдамыраак нөлгө умтулгандыктан, абсолюттук интегралдануучу болот. ◀

6⁰. Айталы $f(x)$ жана $x \cdot f(x)$ абсолюттук интегралдануучу функциялар болушсун, анда $F(\xi) = \Phi[f]$ дифференцирленүүчү болуп, туундусу

$$F'(\xi) = \Phi[-i x f(x)] \quad (25)$$

эрежеси менен эсептелет.

► Чынында эле $F(\xi)$ функциясын аныктаган

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i \xi x} dx$$

интегралын ξ параметри боюнча дифференцирлеп,

$$-i \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) e^{-i \xi x} dx$$

интегралына ээ болобуз. Шарт боюнча $x \cdot f(x)$ абсолюттук интегралдануучу болгондуктан, акыркы өздүк эмес интеграл жыйналуучу болуп, анын мааниси $(-i x) \cdot f(x)$ функциясын Фурье боюнча $\Phi[-i x f(x)]$ – элесине барабар болот. ◀

Каралган 6⁰ – касиетин жалпылап, чексиздикте $f(x)$ өтө ыкчам нөлгө умтулганда $F(\xi)$ нин жылмакайлык деңгээлин жогоруларын байкоого болот. Чынында эле каалагандай p саны үчүн

$x^p \cdot f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ десек, анда $F(\xi)$ нин чексиз тартипке чейин дифференцирленүүчү болору келип чыгат.

Практикалык эсептөөлөрдө пайдалануу үчүн айрым функциялардын Фурьенин (13) көрүнүштө жазылган өзгөртүп түзүүсү боюнча табылган элестерин таблицасын түзөбүз:

1 – таблица:

	$f(x)$	$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$
1	$f(a, x), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\xi}{a}\right)$
2	$f(x - a)$	$e^{-i\xi a} F(\xi)$
3	$e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$
4	$e^{-a x }, \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}$
5	$\begin{cases} 1, & \text{эгерде } x < a, \\ 0, & \text{эгерде } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\xi}{\xi}$
6	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{- \xi }$
7	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \xi }$
8	$x e^{-a x }, \quad a > 0$	$-2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i a \xi}{(\xi^2 + a^2)^2}$
9	$\begin{cases} \cos ax, & \text{эгерде } x < \frac{\pi}{a}, \\ 0, & \text{эгерде } x > \frac{\pi}{a} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 - \xi^2} \cos \frac{\pi \xi}{2a}$
10	$\begin{cases} 1 - x , & \text{эгерде } x < 1, \\ 0, & \text{эгерде } x > 1 \end{cases}$	$2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\xi} \right)^2$

§19.2 Лапластын өзгөртүп түзүүсү

19.2.1 Лапластын өзгөртүп түзүүсүн аныктамасы

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн бүтүндөй $(-\infty, +\infty)$ сан огунда суммалануучу болгон функциялар үчүн гана колдонууга болгондуктан, аны дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда жана башка практикалык эсептөөлөрдө кеңири колдоно албайбыз. Анткени, изделүүчү белгисиз чондукка алдын ала суммалануучу болсун деген шарт коюу, ал сүрөттөгөн кубулушка коюлган чектөө болуп, реалдуу процеске карата түзүлгөн математикалык модел ошол процессти мүнөздөй албай калышы мүмкүн. Ошондой эле, көпчүлүк дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда кездешүүчү $x \rightarrow \pm\infty$ умтулганда чектелбеген, б.а. чексизге умтулган функциялардын да Фурье боюнча элесин табуу мүмкүн эмес. Фурьенин интегралдык өзгөртүп түзүүсүндөгү мындай кемчилдикти, Лапластын интегралдык өзгөртүп түзүүсүн киргизүү аркылуу жоюу мүмкүн (Айрым учурларда кемчилдикти Фурьенин операторуна жалпыланган функциялар түшүнүгүн киргизүү менен да жоюуга болот).

Айталы, $f(x)$ функциясы x өзгөрмөсүнө карата $[0, \infty)$ жарым интервалында үзгүлтүксүз же бөлүкчө үзгүлтүксүз, б.а. $f(x)$ функциясын $(0, \infty)$ интервалында чектүү сандагы биринчи түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ болушу мүмкүн дейли. Мындан сырткары $f(x)$ бүтүндөй $(-\infty, +\infty)$ сан огунда интегралдануучу болбогону менен, аны басандатуучу $e^{-\gamma x}$ кошумча функцияга көбөйткөндөн кийин $f(x) \cdot e^{-\gamma x}$ интегралдануучу болуп калсын (γ кандайдыр бир чыныгы сан). Анда кайсы бир $\mu = \lambda + i s$ комплекстик сандарын комплекстик тегиздиктин $Im \mu = s = -\gamma$ түзүндө жайгашкан чекиттеринде

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\mu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{sx} e^{-i\lambda x} dx \quad (26)$$

интегралы жыйналуучу болуп, аны $f(x) \cdot e^{sx}$ функциясын Фурье боюнча өзгөртүп түзүүсү катарында кабыл алууга болот. Мында λ, s чыныгы сандар.

Бул учурда $f(x) \cdot e^{-\gamma x}$ функциясын абсолюттук интегралдануучулугу (суммалануучулугу) башкы талап болгондуктан, ал талап

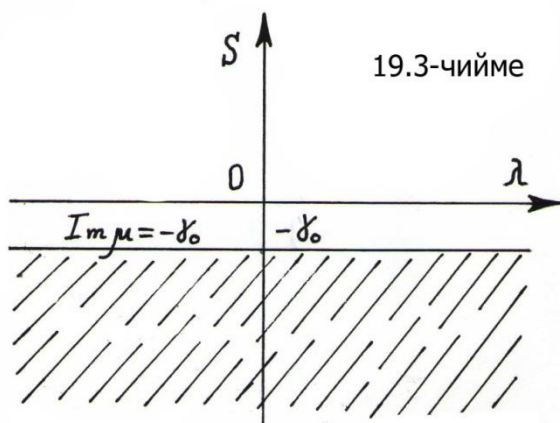
$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) \text{ функциясын өсүү көрсөткүчү катарында} \\ & \text{конкреттүү табылган } \gamma_0, C - \text{ сандарына карата} \\ & \begin{cases} x \geq 0 \text{ болгондо } f(x) < C \cdot e^{\gamma_0 x}, \\ x < 0 \text{ болгондо } f(x) = 0 \end{cases} \end{aligned}} \quad (27)$$

шарттары орун алганда гана аткарыларын көрөбүз. Чынында эле, (27) талабын эске алуу менен, $Im \mu = -\gamma_0$ түзү менен чектелген төмөнкү жарым тегиздиктин $s < -\gamma_0$ шартын канааттандырган бардык

$\mu = \lambda + i s$ комплексик чекиттеринде (26) интегралын

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\mu x} dx \quad (28)$$

көрүнүштө жазып, анын $\Phi(\mu)$ мааниси, $f(x) \cdot e^{sx}$ функциясын Фурье боюнча элеси болорун көрөбүз (19.3 – чийме).



(14^B) формуласы боюнча анын тескерисин

$$f(x) \cdot e^{sx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mu) e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{же}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i s - \infty}^{i s + \infty} \Phi(\mu) e^{i\mu x} d\mu \quad (29)$$

$$(\mu = \lambda + i s)$$

көрүнүштө жаза алабыз.

(28), (29) формулаларында $p = i \mu = i (\lambda + i s) = -s + i\lambda \equiv s + i\sigma$ өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу жүргүзүп, $\Phi(\mu) = F(p)$ деп белгилеп, өз ара тескери

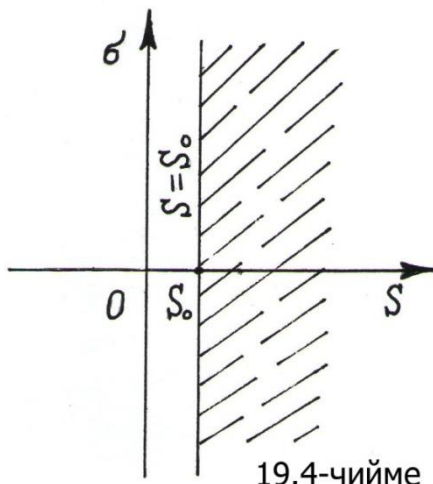
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx, \quad (28^A)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} F(p) e^{px} dp \quad (29^A)$$

интегралдык өзгөртүп түзүүлөрүн алабыз. Бул учурда $\operatorname{Re} p > s \geq s_0$ болгондо (27) шарты аткарылат жана $s_0 = \inf \{s\}$ саны (28^A), (29^A) чагылтуулары аткарыла тургандай $f(x)$ тин эң **минималдык өсүү көрсөткүчү** болот (19.4 – чийме).

19.2 Аныктама. *Айталы, $f(t)$ – функциясы t чыныгы өзгөрүлмөсүнө карата $[0, \infty)$ жарым интервалында үзгүлтүксүз же бөлүкчө үзгүлтүксүз (чектүү сандагы чекиттерде биринчи түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ болушу мүмкүн) бир өзгөрүлмөлүү функция болсун (Бирок, $f(t)$ – функциясын маанилери комплекстик сан болушу да мүмкүн). Бул учурда*

$$L\{f(t)\}: \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p) \quad (30)$$



көрүнүштө аныкталган комплекстик өзгөрүлмөлүү $F(p)$ функциясы $f(t)$ нын Лаплас боюнча өзгөртүүсү деп аталат жана ал оператор катарында $L\{f(t)\} = F(p)$ символу менен жазылат. Мында $p = s + i\sigma$ көрүнүштөгү комплекстик сан ($s, \sigma \in R$)

Мындай чагылтууда t – чыныгы өзгөрүлмөлүү $f(t)$ функциясына $\operatorname{Re} p > s_0$ комплекстик областында аныкталган комплекстик өзгөрүлмөлүү аналитикалык $F(p)$ функциясы туура келет. Бул учурда $f(t)$ – **оригинал функция**, ал эми $F(p)$ – **элес функция же сүрөттөлүү функциясы** деп аталат. Ошентип, Фурьенин интегралдык өзгөртүп түзүүсүн колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүү

аракетинин жүрүшүндө, Лапластын (30) өзгөртүп түзүүсү келип чыгат. Убакыт оң сан болуп $t \in [0, \infty)$ аралыгында өзгөргөндүктөн Лапласты убакытка карата колдонууга ыңгайлаштырып, Фурьенин өзгөртүп түзүүсү менен адаштырбоо максатында x өзгөрүлмөсүн t өзгөрүлмөсү менен алмаштырып жазууну туура таптык.

19.1 Теорема. *Өсүү көрсөткүчү $\operatorname{Re} p = s > s_0$ болгон ар кандай $f(t)$ оригинал функциясы үчүн, комплекстик $\operatorname{Re} p = s > s_0$ жарым тегиздигинде Лаплас боюнча элес катарында аныкталган $F(p)$ – функциясы жашайт жана ал айтылган жарым тегиздикте $p = s + i\sigma$ өзгөрүлмөсүнө карата аналитикалык функция болот.*

Далилдөө. ► Эгерде $\operatorname{Re} p = s > s_0$ жарым комплекстик тегиздигинде (30) интегралы $F(p)$ функциясына абсолюттук жыйналса, анда ушул жарым тегиздикте $F(p)$ функциясын жашашы далилденген болот. Чынында эле

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-(s+i\sigma)t}| dx = \\ &= \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-i\sigma t}| \cdot |e^{-s t}| dx \leq \int_0^{+\infty} C \cdot e^{s_0 t} \cdot 1 \cdot e^{-s t} dx = \\ &= \frac{C}{s - s_0} \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} d(s - s_0)x = \begin{cases} \frac{C}{s - s_0}, & \text{эгерде } s > s_0, \\ \infty, & \text{эгерде } s \leq s_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Мында $p = s + i\sigma$, $|e^{-i\sigma t}| = |\cos t\sigma + i \sin t\sigma| = \sqrt{\cos^2 t\sigma + \sin^2 t\sigma} = 1$ деп алынды.

Ошентип (27) шарты аткарыла тургандай конкреттүү s_0, C сандары табылган учурда, элес функция $|F(p)| \leq \frac{C}{s-s_0}$ санынан ашып кете албайт.

$F(p)$ нын аналитикалык функция болорун көрсөтөлү.

(30) туюнтмасын p параметри боюнча дифференцирлеп,

$$F'(p) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt \quad (*)$$

теңдештигине ээ болобуз. $F'(p)$ жашашын көрсөтүү үчүн (*) теңдештигин оң жагындагы интегралдын ушул функцияга абсолюттук жыйналуучу болорун

$$\begin{aligned} |F'(p)| &= \left| - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-pt}| t dt \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} C \cdot e^{s_0 t} \cdot |e^{-(s+i\sigma)t}| t dt = C \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} \cdot |e^{-i\sigma t}| t dt \leq \\ &\leq C \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} \cdot 1 \cdot t dt = C \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} t dt = \left[\begin{array}{l} u = t, \quad du = dt; \\ dv = e^{-(s-s_0)t} dt, \\ v = \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \end{array} \right] = \\ &= C \cdot \left[t \cdot \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s-s_0} \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \right] = \frac{C}{(s-s_0)^2} \end{aligned}$$

көрсөтөбүз (Мында $t \cdot \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \rightarrow 0$).

Ошентип, $Re p = s \geq s_1 > s_0$ болгон s_1 турактуусу үчүн жыйналуучу

$$\left| \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq C \cdot \int_0^{+\infty} t e^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{C}{(s_1-s_0)^2}$$

интегралы менен можорантталган өздүк эмес интеграл жыйналгандыктан, (*) бир калыпта жыйналат жана аны p боюнча

дифференцирлөөгө укугубуз бар. Экинчи жактан, $F'(p)$ жашагандыктан, $F(p)$ – элес функциясы $Re p = s > s_0$ жарым тегиздигинде аналитикалык болот. ◀

Мисалдар

1). $f(t) = cost$ функциясы чектелген функция б.а. $|cost| \leq 1$. Мындан $|cost| \leq 1 \cdot e^{0t}$ болот. Демек, берилген функцияга $s_0 = 0$ үчүн (27) шарт аткарылат.

2). $f(t) = \frac{1}{t}$ жана $f(t) = tg t$ функциялары үчүн

$t = 0$ чекити экинчи түрдөгү үзүлүү чекити болгондуктан, $f(t)$ оригинал функция болбойт.

3). $f(t) = I(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ функциясын Лаплас боюнча элесин

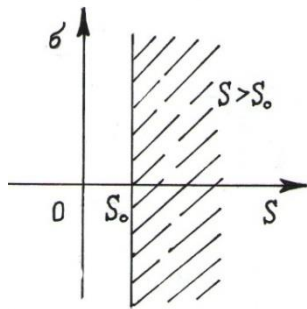
тапкыла.

Чыгаруу.▶ $f(t)$ нын Лаплас боюнча элеси

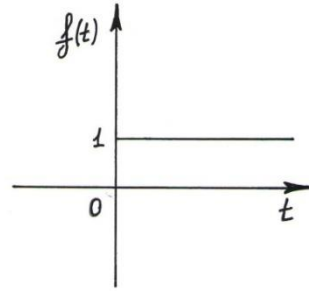
$$F(p) = L\{I(t)\} = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad (Re p = s > 0) \quad (31)$$

болот. Себеби

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-pt}| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0 \text{ болушу керек.}$$



19.5-чийме



Демек, $I(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}, \mu > 0,$

же $L\{I(t)\} = \frac{1}{p}, s > 0$

болот (19.5 – чийме). ◀

4). $f(t) = e^{\lambda t}$

функциясын Лаплас боюнча өзгөртүүсүн тапкыла. Мында λ - параметри комплекстик сан жана $t < 0$ үчүн $f(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright L\{e^{\lambda t}\} &= \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = \\ &= \frac{e^{-(p-\lambda)t}}{-(p-\lambda)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\lambda}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Бул учурда

$$L\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{p-\lambda}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \lambda \text{ болот. } \blacktriangleleft$$

19.2.2 Лапластын өзгөртүп түзүүсүн негизги касиеттери

Лапластын өзгөртүп түзүүсү Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнүн айрым учуру болгондуктан, жогоруда каралган Фурьенин интегралдык өзгөртүп түзүүсүнүн бардык касиеттери кайталанат. Бирок, Лапластын өзгөртүп түзүүсүн практикалык колдонуу кеңдигин эске алып, анын касиеттерине кеңири токтолобуз.

Мындан ары $f(t), \varphi(t), \dots$, оригинал функцияларын Лаплас боюнча элес функцияларын $F(p), \Phi(p), \dots$, менен белгилейли.

1⁰. СЫЗЫКТУУЛУК КАСИЕТИ.

Ар кандай $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ үчүн $L\{\alpha f(t) + \beta \varphi(t)\} = \alpha F(p) + \beta \Phi(p)$ болот. Мында \mathbb{C} – бардык комплекстик сандардын көптүгү

$$\begin{aligned} \blacktriangleright L\{\alpha f(t) + \beta \varphi(t)\} &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta \varphi(t)] e^{-pt} dt = \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \alpha F(p) + \beta \Phi(p) \end{aligned}$$

болот. ◀

Мисалы

$\cos \omega t$, $\sin \omega t$, $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ функцияларын Лаплас боюнча элестерин тапкыла.

Чыгаруу. ▶ Мында Лапластын өзгөртүүлөрүн табуу үчүн Эйлердин жана (32) формулаларын колдонобуз:

1) $f(t) = \cos \omega t$ үчүн

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\cos \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2} L\{e^{i\omega t}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-i\omega t}\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (\operatorname{Re} p = s > 0) \end{aligned}$$

2) $f(t) = \sin \omega t$ үчүн

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\sin \omega t\} = L\left\{\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right\} = \frac{1}{2i} L\{e^{i\omega t}\} - \frac{1}{2i} L\{e^{-i\omega t}\} = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Демек, } L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (\operatorname{Re} p = s > 0). \quad (33)$$

$$3) f(t) = \operatorname{cht} \quad \text{үчүн} \quad L\{f(t)\} = L\{\operatorname{cht}\} = L\left\{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right\}$$

$$\frac{1}{2} (L\{e^t\} + L\{e^{-t}\}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right]$$

$$L\{cht\} = \frac{p}{p^2 - 1}, \quad \operatorname{Re} p = s > 1 \quad (34)$$

БОЛОТ. ◀

4) $f(t) = sht = \frac{1}{2i} (e^t - e^{-t})$ нын Лапластын өзгөртүүсүн өзүнөр

тапкыла.

2⁰. Окшоштук. $f(t)$ нын Лаплас боюнча элеси $F(p)$ болсо, анда

$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ орун алат ($a > 0, a \in R$ үчүн).

$$\blacktriangleright L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-pt} dt = \left. \begin{array}{l} at = u \\ adt = du \\ 0 \leq u < \infty \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{p}{a}u} du$$

келип чыгын, $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \operatorname{Re} p = s > s_0.$ ◀

5) $f(t) = \operatorname{ch} \omega t$ нын Лаплас боюнча элесин тапкыла.

► (34) – жана **2⁰** – касиетти колдонобуз

$$L\{f(t)\} = L\{\operatorname{ch} \omega t\} = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$L\{\operatorname{ch} \omega t\} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

формуласын алабыз. ◀

1. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү функциялардын Лаплас боюнча элестерин окшоштук касиетин колдонуп эсептегиле:

$$1) f(t) = \text{sh } \omega t, \quad \omega > 0, \quad 2) f(t) = \sin 2t, \quad 3) f(t) = \cos 3t.$$

3⁰. $f(t)$ нан туунду алуу эрежеси.

$f(t)$ менен $f'(t)$ оригинал функциялар жана $f(t)$ нын Лаплас боюнча элеси $F(p)$ болсо, анда

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0) \quad (35)$$

болот.

Далилдөө. ► $f(t)$ нын Лаплас боюнча элеси $F(p)$ болсо, анда

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(at)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \\ &= 0 - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0) \end{aligned}$$

(35) тин чын экендиги далилденет. Чынында эле $f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty}$ – дин жогорку предели нөлгө барабар, анткени $\text{Re } p = s > s_0$ жана $t \rightarrow \infty$ үчүн

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$$

шартын эске алсак, анда

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow |f(t)e^{-pt}| \leq M e^{s_0 t} e^{-s t} = M e^{-(s-s_0)t} \rightarrow 0,$$

болот. ◀

Натыйжа 1. Эгерде $f(0) = 0$ болсо, анда $L\{f'(t)\} = pF(p)$ болот.

Натыйжа 2. $f(t)$ функциясы жана $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ оригинал функциялар болсо, анда

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad n \in \mathbb{N} \quad (36)$$

болот.

Далилдөө. ► Математикалык индукция методу менен далилдейбиз. $n = 1$ болгондо (35) формуладан $L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$ келип чыгып, (36) аткарылат. $n = k$ болгондо (36) формуланы

$$L\{f^{(k)}(t)\} = p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \dots - pf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0) \quad (37)$$

туура болсун деп кабыл алып, $n = k+1$ үчүн (36) формуланын туура экендигин көрсөтөлү.

(36) формуласын $n = k+1$ үчүн $f^{(k+1)}(t)$ га жазып, туура делген (37) ни эске алып

$$\begin{aligned} L\{f^{(k+1)}(t)\} &= pL\{f^{(k)}(t)\} - f^{(k)}(0) = \\ &= p[p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \dots - pf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)] - f^{(k)}(0) = \\ &= p^{k+1} F(p) - p^k f(0) - p^{k-1} f'(0) - \dots - pf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

теңдештигине ээ болобуз. Анда $k \in \mathbb{N}$ каалаган сан болгондуктан, жогорудагы (36) формуласын $\forall n \in \mathbb{N}$ үчүн туура болору далилденет. ◀

б) $L\{(\sin \omega t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ формуласына таянып $L\{(\sin \omega t)\}$ ны тапкыла.

► (35) формуласы боюнча

$$L\{(\sin\omega t)'\} = pL\{\sin\omega t\} - \sin\omega t|_{t=0} = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2}$$

болот. Ал эми $L\{(\sin\omega t)'\} = L\{\omega \cos\omega t\}$ экендигин эске алсак, анда

$$L\{\omega \cos\omega t\} = \omega L\{\cos\omega t\} = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ же } L\{\cos\omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

берилген функциянын Лаплас боюнча элеси табылат. ◀

2. КӨНҮГҮҮЛӨР

1) 3^0 – касиетти колдонуп $f(t) = \operatorname{ch} \omega t$ жана $f(t) = \operatorname{sh} \omega t$ функцияларын Лаплас боюнча өзгөртүүлөрүн тапкыла

4⁰. F(p) нын туундусу.

Эгерде $F(p) = L\{f(t)\}$ болсо, анда

$$F'(p) = L\{-t f(t)\} \quad (38)$$

болот.

Далилдөө. ► $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ функциясынан p га карата туунду

алсак, анда

$$F(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt = L\{-t f(t)\}$$

(38) келип чыгат. ◀

(38) формуласын жалпылап

$$F^{(n)}(p) = L\{(-t)^n f(t)\}$$

же

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p) \quad (39)$$

формуласын алабыз.

7) $t^n e^{\lambda t}$ нын Лаплас боюнча элесин тапкыла.

$$\blacktriangleright \frac{1}{p-\lambda} = L\{e^{\lambda t}\}$$

теңдештигинен p боюнча туунду алсак, анда (38) формуласы боюнча

$$-\frac{1}{(p-\lambda)^2} = L\{-te^{\lambda t}\},$$

$$\frac{1!}{(p-\lambda)^2} = L\{-te^{\lambda t}\} \quad (40)$$

болот. Мындан дагы бир жолу p боюнча туунду алсак,

$$\frac{2!}{(p-\lambda)^3} = L\{t^2 e^{\lambda t}\}$$

келип чыгат. Мындай туунду алууну n – туундуга чейин улантып

$$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}} = L\{t^n e^{\lambda t}\} \quad (41)$$

формуланы алабыз.

$\lambda = 0$ болгон учурда (41) формула

$$\frac{n!}{p^{n+1}} = L\{t^n\} \quad (42)$$

көрүнүштө жазылат.

3. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү функциялардын Лапластык өзгөртүүлөрүн **4^o** – касиетти колдонуп тапкыла:

1) $t \sin \omega t$, 2) $t \cos \omega t$, 3) $t \operatorname{ch} \omega t$, 4) $t \operatorname{sh} \omega t$, 5) $t^2 \cos \omega t$, 6) $t^2 \sin \omega t$.

5^o. Оригинал функциядан интеграл алуу эрежеси.

Эгерде $L\{f(t)\} = F(p)$ болсо, анда

$$L\left\{\int_0^t f(y)dy\right\} = \frac{F(p)}{p} \quad (43)$$

теңдештиги орун алат.

Далилдөө. ► $\varphi(t) = \int_0^t f(y)dy$ функциясын сүрөттөлүшүн

$L\{\varphi(t)\} = \Phi(p)$ деп белгилейли. Анда (35) формуласынан пайдаланып, $\varphi(0) = 0$ болорун эске алуу менен

$$L\{\varphi'(t)\} = L\{f(t)\} = F(p) = p\Phi(p) - \varphi(0)$$

$$F(p) = p\Phi(p)$$

же

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан (43) формуласы келип чыгат. ◀

8). 5^o– касиетти колдонуп $\sin \omega t$ нын Лаплас боюнча сүрөттөлүү функциясын тапкыла.

► $L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ болгондугун эске алсак, анда 5^o – боюнча

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^t \cos \omega y \, dy\right\} = \frac{1}{p} \mathbf{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{p} \frac{p}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{p^2 + \omega^2}$$

болот. Мындан

$$\mathbf{L}\left\{\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right\} = \frac{1}{p^2 + \omega^2}$$

же

$$\mathbf{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

сүрөттөлүү функциясы табылат. ◀

6⁰ Сүрөттөлүү функциясынан интеграл алуу.

Эгерде $F(p) = \mathbf{L}\{f(t)\}$ үчүн

$$\int_p^{\infty} F(z) \, dz$$

интегралы жыйналса, анда

$$\int_p^{\infty} F(z) \, dz = \mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

теңдештиги орун алат.

Далилдөө. ▶ $\mathbf{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \Phi(p)$ болсун деп кабыл алалы. Анда **4⁰**

касиеттин негизинде

$$\mathbf{L}\left\{t \frac{f(t)}{t}\right\} = \mathbf{L}\{f(t)\} = F(p) = -\Phi'(p)$$

орун алат. Мындан интеграл алсак, анда

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = - \int_p^{\infty} d\Phi(p) = \Phi(p) - \Phi(\infty)$$

болуп, $\Phi(\infty) = 0$ болгондуктан,

$$\Phi(p) = \int_p^{\infty} F(z) dz$$

келип чыгат. ◀

9). $\frac{\sin t}{t}$ нын Лаплас боюнча өзгөртүүсүн тапкыла.

► $L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}$ болгондуктан,

$$\int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$$

болот. Мындан $\mathbf{6^0}$ – касиетин эске алсак, анда берилген функциянын

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} p$$

көрүнүштөгү элес функциясын табабыз. ◀

$$10) L\left\{\int_0^t \frac{\sin y}{y} dy\right\} = \frac{\operatorname{arcctg} p}{p} \text{ болот.}$$

$$11). L\left\{\frac{1 - e^{-\lambda t}}{t}\right\} = \ln \frac{p - \lambda}{p} \text{ болорун көрсөткүлө.}$$

► $L\{1 - e^{-\lambda t}\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p - \lambda}$ экендигин эске алсак, анда

$$\int_p^{\infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \lambda}\right) dz = \ln \frac{z}{z - \lambda} \Big|_p^{\infty} = \ln \frac{p - \lambda}{p}$$

болот. Мындан жана 5^0 дөн

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} \right\} = \ln \frac{p - \lambda}{p}$$

мисалдын чыгырылышы келип чыгат. ◀

$$12) F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{үчүн}$$

$$\int_0^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

экендигин көрсөткүлө.

$$\blacktriangleright F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

формуласын эки тарабынан тең интеграл алсак, анда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(p) dp &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt dp = \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} e^{-pt} dp dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \left(-\frac{1}{t} e^{-pt} \right) \Big|_0^{\infty} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

болот. ◀

$$13). \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{интегралын эсептегиле}$$

▶ $\mathbf{L}\{\sin t\} dt = \frac{1}{p^2 + 1}$ болорун жана 12) – мисалды эске алсак, анда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^2 + 1} dp = \arctan p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

жообуна ээ болобуз. ◀

19.3 Аныктама . Кандайдыр бир $\alpha > 0$, $\alpha \in R$ санына карата түзүлгөн $\varphi(t) = f(t - \alpha) \cdot I(t - \alpha)$ көрүнүштөгү функция кечикме функция деп аталат. Мында

$I(t - \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } t < \alpha, \\ 1, & \text{эгерде } t \geq \alpha \end{cases}$ – бирдик функция, ал эми R - бардык чыныгы сандардын көптүгү.

7⁰. Кечикме касиети.

Эгерде $L\{f(t)\} = F(p)$ болсо, анда $L\{f(t - \alpha)\} = e^{-p\alpha} \cdot F(p)$ болот, б.а. оригиналы α убакытка кечиксе, анда анын Лаплас боюнча сүрөттөлүшү $e^{-p\alpha}$ га көбөйтүлөт. Мында α – кандайдыр бир оң чыныгы сан.

$$\begin{aligned} \text{Далилдөө} \blacktriangleright. L\{f(t - \alpha)\} &= \int_0^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\alpha} f(t - \alpha) e^{-pt} dt + \int_{\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt \end{aligned}$$

Мындан, $t < \alpha$ үчүн $f(t - \alpha) = 0$ экендигин эске алсак, анда

$$\begin{aligned} L\{f(t - \alpha)\} &= 0 + \int_{\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} f(t - \alpha) e^{-pt} dt \end{aligned}$$

болот. Акыркы интегралга $t - \alpha = \tau$ өзгөрүлмөсүн киргизсек, анда

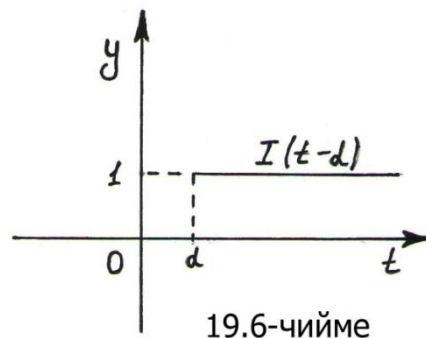
$dt = d\tau$, $t = \alpha$ үчүн $\tau = 0$ жана $t \rightarrow \infty$ үчүн $\tau \rightarrow \infty$ болот. Демек

$$L\{f(t - \alpha)\} = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} e^{-p\alpha} d\tau =$$

$$= e^{-p\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\alpha} F(p)$$

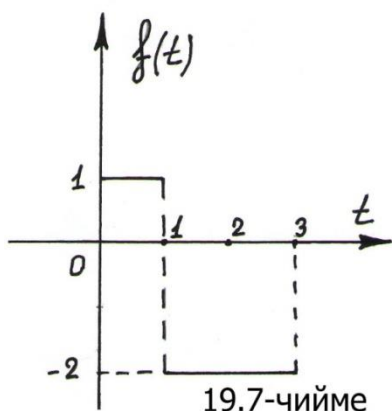
баяндалган касиет туура. ◀

14). Кечикме бирдик функциянын Лаплас боюнча өзгөрүүсүн тапкыла (19.6 – чийме).



► Кечикме бирдик функцияга $I(t - \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } t < \alpha, \\ 1, & \text{эгерде } t \geq \alpha \end{cases}$

(31) формуланы эстеп 7^0 – касиетти колдонсок,



$$L\{f(t - \alpha)\} = \frac{1}{p} e^{-pt}$$

бирдик функциянын Лаплас боюнча элесин табабыз. ◀

15). 19.7 – чиймеде берилген функциянын Лаплас боюнча өзгөртүүсүн тапкыла.

► Адегенде $f(t)$ функциясын бирдик функциянын жардамы аркылуу жазалы:

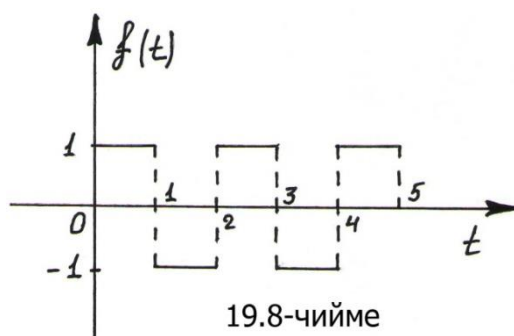
$$f(t) = I(t) - 2 \cdot I(t - 1) + I(t - 3).$$

Мындан, сызыктуулук жана 7^0 – касиетти эске алсак, анда

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{I(t) - 2 \cdot I(t - 1) + I(t - 3)\} = \\ &= L\{I(t)\} - 2L\{I(t - 1)\} + L\{I(t - 3)\} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-3p} = \frac{1}{p} [1 - 2 e^{-p} + e^{-3p}] \end{aligned}$$

талап кылынган өзөртүп түзүүнү аткарган болобуз. ◀

16). Графиги 19.8 – чиймеде берилген функциянын Лаплас боюнча өзгөртүүсүн тапкыла.



► 18.8 – чиймеде көрсөтүлгөн функциянын аналитикалык түрдө

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } 2k < t < (2k+1), \\ -1, & \text{эгерде } (2k+1) < t < (2k+2) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

көрүнүштө жазууга болот. Бул учурда

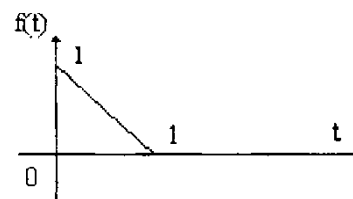
$$\begin{aligned} f(t) &= I(t) - 2 \cdot I(t - 1) + 2 \cdot I(t - 2) - 2 \cdot I(t - 3) + \dots = \\ &= I(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I(t - k) \end{aligned}$$

болгондуктан, $|e^{-p}| < 1$ үчүн

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p} [1 - 2e^{-p} (1 - e^{-p} + e^{-2p} - \dots)] = \frac{1}{p} \left[1 - 2e^{-p} \frac{1}{1 + e^{-p}} \right] \text{ орун алат. Демек}$$

графикте берилген функциянын Лаплас боюнча элеси

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{p} \left[\frac{1 - e^{-p}}{1 + e^{-p}} \right] = \frac{1}{p} \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}} = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{p}{2}$$

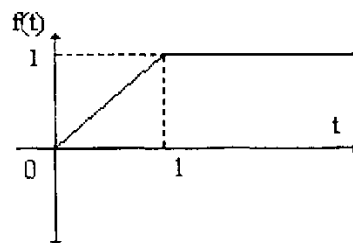


көрүнүшүндө эсептелет. ◀ **19.9 – чийме.**

4. КӨНҮГҮҮЛӨР

Графиктери а) 19.9 жана б) 19.10 – чиймелери берилген

19.10 – чийме.



функциялардын Лаплас боюнча

өзгөртүүлөрүн тапкыла:

Жообу: а) $F(p) = \frac{e^{-p} - 1 + p}{p^2}$, б) $F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2}$.

8⁰. Жылышуу касиети.

Эгерде $L\{f(t)\} = F(p)$ болсо, анда

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{үчүн } L\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(p - \lambda) \text{ болот.}$$

Далилдөө. ► Чынында эле $e^{\lambda t} f(t)$ функциясына (30) формуласын колдонсок

$$L\{e^{\lambda t} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda)$$

келип чыгат. ◀

Мисалдар

17). $L\{e^{\lambda t} \cos \omega t\}$ жана $L\{e^{\lambda t} \sin \omega t\}$ өзгөртүүлөрүн эсептегиле.

► (33) формуласы менен 8⁰ – касиетти колдонуп

$$L\{e^{\lambda t} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

формуласын алабыз. Жогорудагыдай эле жол менен

$$L\{e^{\lambda t} \cos \omega t\} = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$$

формуласын келтирип чыгарууга болот. ◀

18). $L\{e^{\lambda t} t^n\}$ туюнтмасын тапкыла.

► (42) эрежеси менен 8⁰ – касиеттен

$$L\{e^{\lambda t} t^n\} = \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$$

туянтманын маанисин табабыз. ◀

5. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөндөгү функциялардын Лаплас боюнча өзгөртүүлөрүн тапкыла:

1) $e^{\lambda t} \operatorname{ch} \omega t$, 2) $e^{\lambda t} \operatorname{sh} \omega t$.

§ 19.3 Капталган (Свертка) функциялар жана алардын Лаплас боюнча элестерин табуу

19.4 Аныктама. Чыныгы өзгөрүлмөлүү $f(t)$ жана $\varphi(t)$ эки функцияларына карата аныкталган

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \quad (44)$$

көрүнүштөгү функция, $f(t)$ менен $\varphi(t)$ нын капталуусу деп аталат. Мында «*» символу менен эки функциянын капталуусу белгиленген.

Натыйжа. Капталган функциялар орун алмаштыруу касиетине ээ, б.а.

$$f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t)$$

теңдештиги орун алат.

$$\blacktriangleright f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \left. \begin{array}{l} t - \tau = u \\ d\tau = -du \end{array} \right| =$$

$$= - \int_t^0 f(t - u) \varphi(u) du = \int_0^t \varphi(u) f(t - u) du =$$

$= \varphi(t) * f(t)$ болот. ◀

Мисалдар

1). e^t менен t нын капталган функциясын тапкыла.

$$\blacktriangleright e^t * t = \int_0^t e^\tau (t - \tau) d\tau = \left. \begin{array}{l} t - \tau = u, e^\tau d\tau = dv \\ -d\tau = du, e^\tau = v \end{array} \right| =$$

$$= e^\tau (t - \tau) \Big|_0^t + e^\tau \Big|_0^t = -t + e^t - 1$$

$$e^t * t = e^t - (t+1). \quad (45) \quad \blacktriangleleft$$

2). $\sin t$ менен $\cos t$ лардын капталган функциясын тапкыла.

$$\blacktriangleright \sin t * \cos t = \int_0^t \sin \tau \cos(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin t + \sin(2\tau - t)] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tau \sin t - \frac{1}{2} \cos(2\tau - t) \right]_0^t = \frac{1}{2} \left[t \sin t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos t \right] = \frac{1}{2} t \sin t$$

болот. \blacktriangleleft

9⁰. – Лапластын өзгөртүүсүн көбөйтүндүсү – Борелдин теоремасы. Эгерде $L\{f(t)\} = F(p)$ жана $L\{\varphi(t)\} = \Phi(p)$ болсо, анда

$$L\{f(t) * \varphi(t)\} = F(p) \Phi(p)$$

болот.

Далилдөө. $\blacktriangleright f(t) * \varphi(t)$ нын Лаплас боюнча элесин эсептеп,

$$\begin{aligned} L\{f(t) * \varphi(t)\} &= L\left\{ \int_0^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau dt, \end{aligned}$$

ээ болобуз.

Интегралдоонун ордун алмаштырып (Дирихленин формуласын колдонуп)

$$L\{f(t) * \varphi(t)\} = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt \varphi(\tau) d\tau$$

ны алабыз. Мындан $t - \tau = u$ өзгөрүлмөсүн киргизсек, анда $dt = du$ жана $\tau \leq t < \infty$ үчүн $0 \leq u < \infty$ болот. Демек

$$\begin{aligned} L\{f(t) * \varphi(t)\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(u+\tau)} f(u) \varphi(\tau) du d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u) du \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

талап кылган $L\{f(t) * \varphi(t)\} = F(p) \Phi(p)$ теңдештиги аткарылат. ◀

Мисалдар

3). $\Phi(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$ функциясын оригиналын тапкыла.

► $\Phi(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{p-1} = L\{t * e^t\}$ болорун көрүп,

1) – мисалдагы (45) тен

$$L\{t * e^t\} = e^t - (t+1) = \varphi(t)$$

оригинал функциясын табабыз. ◀

4). $\Phi(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$ функциясын оригиналын тапкыла.

► Берилген функцияны $\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \frac{p}{p^2+1} = L\{\sin t * \cos t\}$

көрүнүшкө өзгөртүп жазып, 2) – мисалды эске алып,

$$L\{\sin t * \cos t\} = \frac{1}{2} t \sin t = \varphi(t)$$

жообун алабыз. ◀

5). $\Phi(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$ нын оригиналын тапкыла.

$$\blacktriangleright \Phi(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \frac{1}{p^2+1} = L\{\sin t * \sin t\}.$$

Мындан

$$L\{\sin t * \sin t\} = \int_0^t \sin \tau \sin (t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos (2\tau-t) - \cos t] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\tau-t) - \tau \cos t \right]_0^t = \frac{1}{2} [\sin t - t \cos t] = \varphi(t). \blacktriangleleft$$

6. КӨНҮГҮҮЛӨР

Борелдин теоремасын пайдаланып төмөндөгү элес функцияларын оригиналдарын тапкыла

$$1) \frac{p}{(p^2+3)^2}, \quad 2) \frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

10⁰. Параметр боюнча туунду.

Эгерде x тин ар кандай мааниси үчүн $f(t, x)$ функциясын Лаплас боюнча өзгөрүүсү $F(p, x)$ аныкталса, анда

$$L\left\{\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right\} = \left\{\frac{\partial F(p, x)}{\partial x}\right\}$$

теңдештиги орун алат.

Мисалдар

$$6). L\{t e^{\lambda t}\} = \frac{1}{p-\lambda}$$

элес функциясын λ параметрине карата туундусун тапкыла.

$$\blacktriangleright L\left\{\frac{\partial e^{\lambda t}}{\partial \lambda}\right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{p-\lambda}\right), \text{ ал эми } L\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{(p-\lambda)^2}$$

болот. Мындай ой жүгүртүүнү улантып

$$L\{t^2 e^{\lambda t}\} = \frac{2!}{(p-\lambda)^2}$$

.....

$$L\{t^n e^{\lambda t}\} = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$$

формуларын алабыз. ◀

$$7). L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ менен } L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \text{ нын } \omega \text{ га карата}$$

туундусун тапкыла.

$$\blacktriangleright L\left\{\frac{\partial \sin \omega t}{\partial \omega}\right\} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)$$

$$\text{же } L\{t \cos \omega t\} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

болот. Ушундай эле жол менен $L\{\cos \omega t\}$ нын туундусун табабыз. ◀

$$8). L\{\operatorname{sh} \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \text{ менен } L\{\operatorname{ch} \omega t\} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

нын ω га карата туундуларын эсептегиле.

$$\blacktriangleright L\left\{\frac{\partial \operatorname{sh} \omega t}{\partial \omega}\right\} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}\right) \text{ болот.}$$

$$\text{Мындан } L\{t \operatorname{ch} \omega t\} = \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$$

келип чыгат. $L\{\text{ch}\omega t\}$ нын туундусу да жогорудагыдай табылат. ◀

7. КӨНҮГҮҮЛӨР

$t^2 \cos\omega t$ жана $t^2 \sin\omega t$ функцияларын Лаплас боюнча элестерин ω параметри боюнча туундусун тапкыла.

§ 19.4 Айрым функциялардын элестерин жана оригиналдарын табуу усулдары

19.4.1 Мезгилдүү функциялардын Лаплас боюнча элестери
Бизге мезгили T болгон $f(t)$ функциясы берилсин. Бул функциянын

Лаплас боюнча элесин табуу үчүн төмөнкү

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \text{ жана } t < 0 \end{cases}$$

функциянын Лаплас боюнча элесин эсептейли:

$$F_0(p) = \int_0^{\infty} f_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt \quad (45)$$

Эми $f(t)$ менен $f_0(t)$ байланыштырган формуланы табалы:

$f(t)$ функциясын $f(t) = f_0(t) + f(t - T)$ көрүнүштө жаза алабыз,

анткени $t < 0$ үчүн $f(t) = 0$.

Мында $f(t - T)$ функциясы $f(t)$ дан T мезгилине кечигүүсү менен гана айырмаланат. Акыркы формулага Лапластын өзгөртүүсүн колдонсок

$$F(p) = F_0(p) + F(p) e^{-Tp}$$

же

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

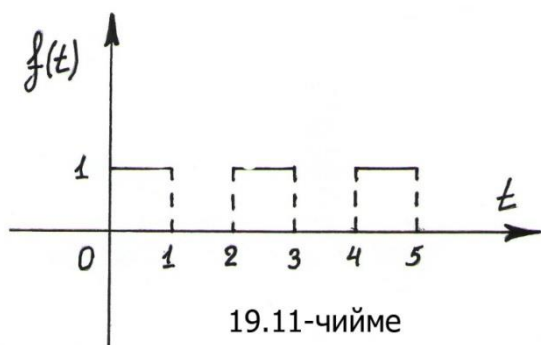
болот. Мындан

$$L\{f(t)\} = F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt \text{ келип чыгат.}$$

Бул функция T мезгилдүү $f(t)$ функциясын Лаплас боюнча элеси болот.

Мисалы:

- 1). 19.11 – чиймеде көрсөтүлгөн мезгили $T=2$ болгон функциянын Лаплас боюнча элесин тапкыла.



► Берилген функция $T=1$ мезгилинде

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

көрүнүштө жазылат. Мындан

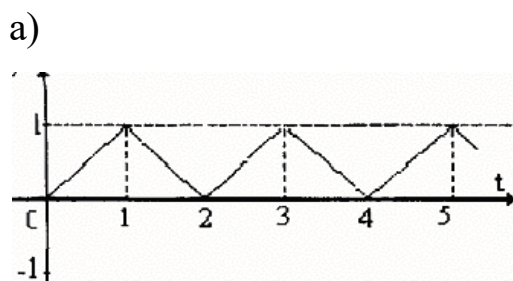
$$L\{f(t)\} = F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \int_0^2 f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{(-1)}{1 - e^{-2p}} \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^1 = \frac{1}{p(1 + e^{-p})}$$

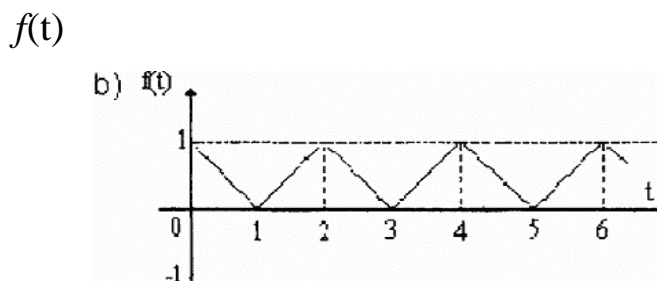
келип чыгат. ◀

8. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү графиктер менен берилген, $T=2$ мезгилдүү функциялардын Лаплас өзгөртүүлөрүн тапкыла:



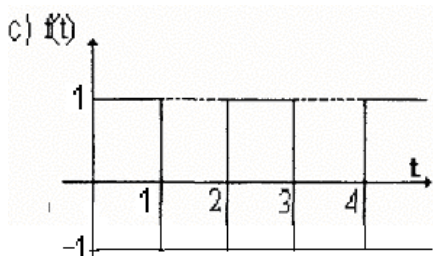
19.12 – чийме



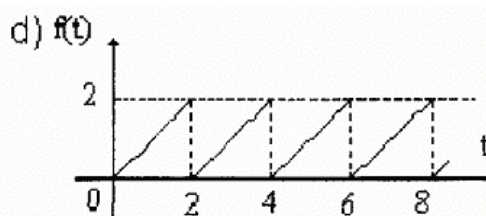
19.13 – чийме

Жооптору:

$$\text{a) } F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p})} ; \quad \text{b) } F(p) = \frac{p - 1 + 2e^{-p}}{p^2(1 - e^{-2p})}$$



19.14 – чийме



19.15 – чийме

Жооптору:

$$\text{c) } F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(1 - e^{-p})} ; \quad \text{d) } F(p) = \frac{1 - (2p + 1)e^{-2p}}{p^2(1 - e^{-2p})}$$

19.4.2 Лапластын элеси боюнча оригинал функцияны табуу

19.2 Теорема . Лапластын өзгөртүүсүн элеси рационалдык дурус бөлчөк болушу үчүн, ал өзгөртүүнүн оригиналы $t^n e^{\lambda t}$ түрүндөгү функциялардын сызыктуу комбинациясынан турушу зарыл жана жетиштүү шарт болот. Мында λ кандайдыр бир комплекстик сан, n терс эмес бүтүн сан.

Лаплас боюнча элес функциялары p га карата дурус рационалдык бөлчөк болгон учурлардагы оригинал функцияларды табуу жолдорун карайлы.

1) Берилген Лапластын элесин жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратып, аныкталбаган коэффициенттер усулу аркылуу оригинал функцияны табуу

Бул метод, рационалдык бөлчөктүү функцияларды интегралдоодо да колдонулат.

2). $F(p) = \frac{p+3}{p(p+1)(p+2)}$ элесин оригиналын тапкыла.

► Дурус рационалдык бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратып

$$\frac{p+3}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}, \quad (46)$$

оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип сол жагына теңдештирсек, анда бөлүмдөрү тең болгондуктан

$$p+3 = A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1), \quad (47)$$

$$\text{же } p+3 = (A+B+C)p^2 + (3A+2B+C)p + 2A$$

алымдары да тең болушу керек. Мындан белгисиз А, В, С коэффициенттерине карата

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + 2B + C = 1, \\ 2A = 3 \end{cases}$$

теңдемелер системасын түзүп, $A=3/2$, $B = -2$, $C = 1/2$ чечимдерин табабыз.

Табылган сандарды (46) га койсок

$$F(p) = \frac{3}{2} \frac{1}{p} - 2 \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+2}$$

келип чыгат. Лапластын өзгөртүүсүн сызыктуулугун жана 2 - таблицаны эске алып, акыркы формуладан

$$f(t) = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

жообуна ээ болобуз. ◀

ЭСКЕРТҮҮ 1. Эгерде дурус бөлчөктүн бөлүмү жөнөкөй болсо, анда аныкталбаган коэффициенттер катышкан теңдемеге жөнөкөй бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө айланткан P нын маанилерин коюп, аныкталбаган коэффициенттерди табууга болот.

Жогорудагы мисалдагы (47) теңдемеге берилген дурус бөлчөктүн бөлүмүн нөлгө айланткан p нын маанилерин койсок жөнөкөй бөлчөктүн бөлүмү

$$p = 0 \quad \text{үчүн} \quad 2A = 3, \quad A = 3/2;$$

$$p = -1 \quad \text{үчүн} \quad -B = 2, \quad B = -2;$$

$$p = -2 \quad \text{үчүн} \quad 2C = 1, \quad C = 1/2$$

көрүнүштөрдө болот. Мындан A, B, C сандары мурда аныкталган сандар менен бирдей экендигин көрөбүз .

3). $F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)}$ Лаплас боюнча элесинин оригиналын

тапкыла.

► Берилген туюнтманы жөнөкөй бөлчөктөргө ажыраталы:

$$\frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$$

$$p+1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1)$$

$$p+1 = (A+B)p^2 + (-B+C)p + (A-C) \quad (48)$$

$$A+B=0, \quad A=-B.$$

Мындан

$$-B + C = 1, \quad -B + C = 1, \quad A - C = 1, \quad -B - C = 1.$$

Демек $B = -1$, $A = 1$, $C = 0$ жана

$$F(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1}$$

болот. Лапластын өзгөртүүсүн сызыктуулугун жана 2 – таблицаны эске алсак, анда оригинал функция

$$f(t) = e^t - \cos t$$

көрүнүштө табылат. ◀

4). $F(p) = \frac{p^3+4}{(p-1)^2(p^2+4)}$ нын оригиналын тапкыла.

► $F(p)$ туюнтмасын жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы түрүндө жазалы:

$$F(p) = \frac{p^3+4}{(p-1)^2(p^2+4)} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

эки тарабынын алымдарын теңдештирсек

$$A(p^2+4) + B(p-1)(p^2+4) + Cp(p-1)^2 + D(p-1)^2 = p^3+4 \quad (49)$$

$$(B+C)p^3 + (A-B-2C+D)p^2 + (4B+C-2D)p + (4A-4B+D) = p^3+4$$

келип чыгат. Мындан

$$\begin{cases} B + C = 1, \\ A - B - 2C + D = 0, \\ 4B + C - 2D = 0, \\ 4A - 4B + D = 4 \end{cases}$$

төрт белгисизи бар теңдемелер системасын алабыз. (49) га $p = 1$ койсок, $5A = 5$, $A = 1$ болот. Жогорку системадан башка $B = 1/5$, $C = D = 4/5$ коэффициенттерин табууга болот. Демек

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{4}{5} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{5} \frac{2}{p^2+4}$$

болот. Мындан, Лапластын өзгөртүүсүн сызыктуулугун жана 2 – таблицаны эске алсак, оригинал функция

$$f(t) = te^t + \frac{1}{5} e^t + \frac{4}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t$$

көрүнүштө табылат. ◀

2) Ресиди теориясын колдонуп оригинал функцияны табуу

Берилген $F(p)$ функциясы, кеңейтилген комплекстик тегиздигиндеги p_1, p_2, \dots, p_n өзгөчө чекиттеринен башка бардык чекиттерде аналитикалык функция болсун жана

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$$

аткарылсын. Бул учурда $f(t)$ оригинал функциясы $F(p)e^{pt}$ функциясын бардык ресидилерин (бардык өзгөчө чекиттерине карата) суммасына барабар, б.а.

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} z [F(p)e^{pt}]. \quad (50)$$

Эгерде " a " чекити $g(z)$ функциясын m – эселүү уюлу болсо, анда

$$g(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (A(0) \neq 0, B(z) = (z - a)^m B_1(z), B_1(a) \neq 0)$$

болорун эске алып, ресидини табуу үчүн

$$\operatorname{Res}_a g(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m g(z)]$$

формуласын колдонобуз. Берилген a чекити $g(z)$ функциянын жөнөкөй уюлу болгондогу айрым учур үчүн, б.а.

$m = 1$, $B(a) = 0$, $B'(a) \neq 0$, $A(a) \neq 0$ болгондо

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_a g(z) &= \operatorname{Rez} \frac{A(z)}{B(z)} \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{A(z)}{B(z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{A(z)}{\frac{B(z) - B(a)}{z-a}} = \frac{\lim_{z \rightarrow a} A(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{B(z) - B(a)}{z-a}} \quad \text{келип чыгып,} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}_a g(z) = \operatorname{Rez} \frac{A(z)}{B(z)} \Big|_{z=a} = \frac{A(a)}{B'(a)} \quad (51)$$

ээ болобуз.

Эми $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ сүрөттөлүү функциясы кыскарбас дурус рационалдык функция (бөлчөк) болсун, мында $A(p)$, $B(p)$ көп мүчөлөрү p га карата түзүлүшкөн. Ошондой эле, $F(p)$ функциясын чектүү сандагы p_1, p_2, \dots, p_n уюлдары (өзгөчө чекиттери) болсун жана алар $B(p)$ функциясын m_1, m_2, \dots, m_n эселүү нөлдөрү болушсун дейли.

Бул учурда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left[(p - p_k)^{m_k} \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right]_{p=p_k}$$

формуласы орун алат. Төмөнкү

$$B(p) = (p - p_k)^{m_k} B_k(p)$$

формулананы эске алсак, анда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{A(p)}{B_k(p)} e^{pt} \right]_{p=p_k}^{(m_k - 1)} \quad (58)$$

формуласын алабыз.

Бардык уюлдары жөнөкөй болгон учур үчүн

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} \right]_{p=p_k} \quad (59)$$

болот.

Алынган формулалардын жардамы менен жогорудагы 2) – мисалды кайра чыгарып көрөлү:

$$5). \quad F(p) = \frac{p+3}{p(p+1)(p+2)} = \frac{p+3}{p^2+3p^2+2p}$$

► Функцияга $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = -2$ сандары жөнөкөй уюлдар болгондуктан, (59) формуласын негизинде

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{p+3}{3p^2+6p+2} e^{pt} \right]_{p=p_k} = \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

келип чыгып 3) – мисалдын чыгарылышын менен дал келди. ◀

Эми 3) – мисалды ресиди жолу менен кайра чыгаралы:

$$► \quad 6) \quad F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p+1}{p^3-p^2+p-1}$$

үчүн $p_1 = 1$, $p_{2,3} = \pm i$ уюлдары жөнөкөй уюлдар. Демек, (59) формуланын негизинде

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{p+1}{3p^2-2p+1} e^{pt} \right]_{p=p_k} = e^t + \frac{1+i}{1-2i-3} e^{it} + \frac{1-i}{1+2i-3} e^{-it} =$$

$$= e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{it} - \frac{1}{2} e^{-it} = e^t - \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) = e^t - \cos t$$

3) – мисалдын жообу кайра кайталанат. ◀

$$7). \blacktriangleright F(p) = \frac{p^3 + 4}{(p-1)^2(p^2 + 4)}$$

функциянын уюлдары $p_1 = 1, p_2 = 2i, p_3 = -2i$ болот. Уюлдар үчүн

$m_1 = 2, m_2 = m_3 = 1$ болгондуктан, (58) формуланын негизинде

$$f(t) = \left[\frac{p^3 + 4}{p^2 + 4} e^{pt} \right]_{p=1}^1 + \left[\frac{(p^3 + 4)e^{pt}}{(p-1)^2(p+2i)} \right]_{p=2i} + \left[\frac{(p^3 + 4)e^{pt}}{(p-1)^2(p-2i)} \right]_{p=-2i} =$$

$$= \left[\frac{3p^2(p^2 + 4) - 2p(p^3 + 4)}{(p^2 + 4)^2} e^{pt} + \frac{t(p^3 + 4)e^{pt}}{p^2 + 4} \right]_{p=1} +$$

$$+ \frac{4 - 8i}{(2i - 1)^2 4i} e^{2it} - \frac{4 + 8i}{(2i + 1)^2 4i} e^{-2it} = \frac{1}{5} e^t + t e^t + \frac{1 + 2i}{5i} e^{2it} +$$

$$+ \frac{2i - 1}{5i} e^{-2it} = \left(t + \frac{1}{5} \right) e^t + \frac{2}{5} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} + \frac{4}{5} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} =$$

$$= \left(t + \frac{1}{5} \right) e^t + \frac{2}{5} \sin 2t + \frac{4}{5} \cos 2t \text{ келип чыгып, 4) – мисалдагы жооп менен}$$

дал келет. ◀

Жогоруда каралган мисалдардын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарабыз: Эгерде сүрөттөлүү функциясын уюлдары жөнөкөй уюлдар болсо, анда оригинал функция ресиди методу менен оңой табылат. Ал эми уюлдар көп эселүү уюлдар же комплекстик сандар болсо, анда чыгаруу татаал болот.

Жалпы учурда, сүрөттөлүү функциясын оригиналын табуу үчүн төмөндөгү теорема колдонулат.

Тескери өзгөртүп түзүү теоремасы:

19.3 Теорема. Эгерде $f(t)$ функциясын Лаплас өзгөртүүсү $F(p)$ болсо, анда каалагандай t чекитинде үзгүлтүксүз болгон $f(t)$ функциясы үчүн

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)e^{pt} dp$$

формуласы орун алат. Мында $f(t)$ функциясын Лаплас интегралы абсолюттук жыйналуучу болгон жарым тегиздикте жайгашкан, ар кандай $\text{Re } p = \gamma$ чексиз түз сызытары боюнча интеграл алууга болот.

9. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү берилген сүрөттөлүү функциялардын оригиналдарын тапкыла:

$$1) \frac{p+1}{p^2(p-1)}, \quad 2) \frac{p-10}{p^2+2p^2+10p}, \quad 3) \frac{5}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$$

$$4) \frac{p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

Жооптору:

$$1) 2e^t - t - 2, \quad 2) e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right) - 1$$

$$3) \sin t - 2 \cos t + e^{-t} (2 \cos t + \sin t), \quad 4) \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \cos 2t.$$

§ 19.5 Лапластын өзгөртүүсүн колдонулуштары

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн жана анын колдонуу мүмкүнчүлүгүн кеңейткен Лапластын өзгөртүүсүн кайсы бир t өзгөрүлмөсүнөн (мисалы убакыт) көз каранды функцияларга карата колдонуу менен, чыгарылышын табуу көптөгөн убарагерчиликтерди жараткан дифференциалдык теңдемелерди, p – параметринен (санынан) көз каранды болгон кадимки алгебралык теңдемелерге өзгөртүп түзөбүз.

19.5.1 Турактуу коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда Лапластын өзгөртүүлөрүн колдонуу
 n – тартиптеги турактуу коэффициенттүү

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t) \quad (60)$$

дифференциалдык теңдемеси берилип, анын

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \quad (61)$$

баштапкы шарттарын канааттандырган чечимдерин издейли.

Айталы $x(t), f(t)$ функцияларын Лапластык элестери

$$L\{x(t)\} = X(p) = X,$$

$$L\{f(t)\} = F(p) = F$$

көрүнүштөрдө белгиленишсин, анда

$$L\{x'(t)\} = pX - x_0$$

$$L\{x''(t)\} = p^2 X - p x_0 - x_0'$$

.....

$$L\{x^{(n)}(t)\} = p^n X - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_0' - \dots - p x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$$

туюнтууларына ээ болобуз.

(60) теңдемесин эки жагына тең Лапластын өзгөртүүсүн колдонуп, сызыктуулук касиетине таянып туюнтулган маанилерди коюп чыксак

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X - \psi_{n-1}(p) = F(p)$$

теңдештиги келип чыгат,

$$\varphi_n(p) X = \psi_{n-1}(p) + F(p)$$

$$X(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} \quad (62)$$

болот. Мында

$$\varphi_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

n -даражадагы мүнөздөгүч полином, ал эми $\psi_{n-1}(p)$ - $(n - 1)$ – даражадагы белгилүү полином.

(62) формуласы менен биз издеген функциянын Лаплас боюнча өзгөртүүсү аныкталат. Мындан, жогоруда берилген методдордун бири менен (60) теңдеменин (61) баштапкы шарттарын канаттандырган чыгарылышын табабыз.

Айталы, 2 – даражалуу дифференциалдык теңдемеси

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x = f(t)$$

жана $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, баштапкы шарттары берилсин. Эми биз берилген теңдемеге жана баштапкы шарттарга Лапластын өзгөртүүсүн колдонсок, анда

$$a_0 [p^2 X - p^1 x'_0 - x_0] + a_1 [pX - x_0] + a_2 X = F$$

же

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X = (a_0 p + a_1) x_0 + a_0 x'_0 + F$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$$X = \frac{(a_0 p + a_1) x_0 + a_0 x'_0 + F}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$$

формуласын алабыз.

Мисалдар

1). $x'' + x' - 2x = e^{2t}$ дифференциалдык теңдеменин $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ баштапкы шарттарын канаттандырган чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин эки тарабына Лапластын өзгөртүүсүн колдонуп жана баштапкы шарттарды эске алсак, анда

$$(p^2 + p - 2)X = \frac{1}{p-2} + 1 \cdot (p + 1) + 2$$

болот. Мындан

$$X = \frac{p^2 + p - 5}{(p-2)(p^2 + p - 2)} = \frac{p^2 + p - 5}{(p-1)(p-2)(p+2)}$$

формуласын алабыз. Эми (50) формуласын эске алсак, анда

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} z [X(p)e^{pt}]$$

болот. Мында $X(p)$ функциясы $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = -2$ жөнөкөй уюлдарга ээ болот. Демек

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{p^2 + p - 5}{(p-2)(p+2)} e^{pt} \right]_{p=1} + \left[\frac{p^2 + p - 5}{(p-1)(p+2)} e^{pt} \right]_{p=2} + \left[\frac{p^2 + p - 5}{(p-2)(p-1)} e^{pt} \right]_{p=-2} = \\ &= \frac{-3}{-3} e^t + \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{-3}{12} e^{-2t} = e^t + \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \end{aligned}$$

же берилген дифференциалдык теңдеме

$$x(t) = e^t + \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

чечимине ээ болот. ◀

2). $x'' + 2x' + 10x = t$ дифференциалдык теңдемесин

$x(0) = 2$, $x'(0) = -1$ баштапкы шарттарын канаттандырган чыгарылышын тапкыла.

► Берилген теңдеменин эки тарабына тең Лапласдын өзгөртүүсүн колдонсок, анда

$$(p^2 + 2p + 10)X = \frac{1}{p^2} + 2(p + 2) - 1$$

теңдештигинен

$$X = \frac{2p^3 + 3p^2 + 1}{p^2(p^2 + 2p + 10)}$$

туюнтуусун алууга болот. Туюнтманын оң жагындагы рационалдык дурус бөлчөктү аныкталбаган (белгисиз) коэффициенттер методу менен жөнөкөй бөлчөктөргө ажыраталы:

$$X = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 10}. \quad (63)$$

Мындан

$$A(p^2 + 2p + 10) + Bp(p^2 + 2p + 10) + Cp^3 + Dp^2 = 2p^3 + 3p^2 + 1 \quad (64)$$

теңдештигин алып, p^k нын ($k = 0, 1, 2, 3$) коэффициенттерин A, B, C, D га карата барабарлап

$$B + C = 2, \quad A + 2B + D = 3,$$

$$2A + 10B = 0, \quad 10A = 1$$

системасын алабыз. Системанын акыркы теңдемесинен $A = 1/10$, үчүнчү теңдемесинен $B = -2/10A$, $B = -1/50$, биринчи теңдемесинен

$C = 2 - B = 2 + 1/50 = 101/50$, экинчи теңдемесинен $D = 3 - A - 2B = 3 - 1/10 + 2/50 = 147/50$ табылат. Табылган коэффициенттердин туура табылгандыгын текшерүү үчүн (64) теңдемесине $p = 1$ ди койсок,

$$13A + 13B + C + D = 6$$

теңдемеси келип чыгып, жогоруда табылган коэффициенттерди койсок,

$$13(1/10) + 13(-1/50) + 101/50 + 147/50 = 6$$

$$6 = 6,$$

аны канааттандырат. Бул болсо, табылган коэффициенттердин туура аныкталгандыгын көрсөтөт.

Эми жогоруда табылган коэффициенттерди (63) кө коюп

$$X(p) = \frac{1}{10} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{50} \frac{1}{p} + \frac{1}{50} \frac{101p+147}{p^2+2p+10} =$$

$$= \frac{1}{10} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{50} \frac{1}{p} + \frac{1}{50} \frac{101(p+1)+46}{(p+1)^2+9}$$

формуласын алабыз. Анын Лаплас боюнча оригиналы

$$x(t) = \frac{1}{10}t - \frac{1}{50} + \frac{1}{50}e^{-t} \left[101\cos 3t + \frac{46}{3}\sin 3t \right]$$

изделүүчү чыгарылыш болот. ◀

3). $x'' + x = f(t)$ теңдеменин $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$ баштапкы шарттарын канаттандырган чыгарылышын тапкыла. Мында, $f(t)$ функциясын графиги 19.16 – чиймеде берилген.

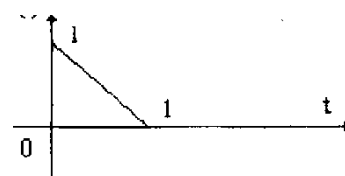
► $f(t)$ ны бирдик функция аркылуу жазсак, анда

$$f(t) = (1-t)I(t) + (t-1)I(t-1)$$

$f(t)$

болот. Анда $f(t)$ нын сүрөттөлүү функциясы

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} e^{-p}$$



көрүнүштө табылат.

19.16 – чийме

Берилген теңдеменин эки тарабына тең Лапласстын өзгөртүүсүн

КОЛДОНСОК

$$(p^2 + 1)X = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p} + 2p - 1$$

$$\text{же } X = \frac{2p^3 - p^2 + p - 1}{p^2(p^2 + 1)} + \frac{e^{-p}}{p^2(p^2 + 1)}$$

формуласын алабыз. Мындан, оң жагындагы биринчи кошулуучуну жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратып

$$\frac{2p^3 - p^2 + p - 1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1},$$

$$\text{же } A(p^2 + 1) + Bp(p^2 + 1) + Cp^3 + Dp^2 = 2p^3 - p^2 + p - 1$$

барабардыгын ээ болобуз. Мындан

$$B + C = 2, \quad A + D = -1,$$

$$B = 1, \quad A = -1$$

системасын түзүп, анын чыгаралыштары $A = -1$,

$B = 1, D = 0, C = 1$ болорун көрөбүз. Бул маанилерди коюп

$$\frac{2p^3 - p^2 + p - 1}{p^2(p^2 + 1)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}$$

барабардыгын алабыз.

Экинчи кошулуучуну да жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{(1 + p^2) - p^2}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1}$$

жазып,

$$X(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1} + \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) e^{-p}$$

формуласын алабыз. Демек, биз издеген чыгарылыш

$$x(t) = -t + 1 + \cos t + [t - 1 - \sin(t - 1)]$$

формуласы менен аныкталат. ◀

10. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин берилген баштапкы шарттарды канаттандырган чыгарылыштарын тапкыла:

1) $x'' + x' - 2x = \sin t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$;

2) $x' + x = e^{2t}$, $x(0) = 2$;

3) $x' - x = f(t)$, $x(0) = 1$.

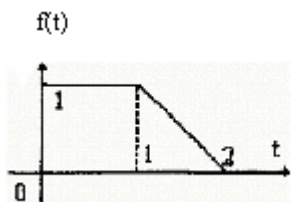
Мында $f(t)$ функциянын графиги 19.17 – чийме менен берилген

4) $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$.

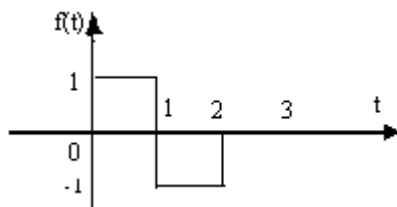
Бул жерде $f(t)$ функциянын графиги 19.18 – чийме менен берилген.

5) $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

6) $x'' + 2x' - 3x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.



19.17 – чийме



19.18 – чийме

Жооптору:

$$1) x(t) = \frac{5}{2}e^t + \frac{3}{5}e^{-2t} - \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t;$$

$$2) x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t};$$

$$3) x(t) = (2^{et} - 1)I(t) + [(t - 1) + 1 - e^{t-1}]I(t - 1) + [e^{t-2} - 1 - (t - 2)]I(t - 2);$$

$$4) x(t) = 2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} I(t) - 2 \sin \frac{2t-1}{2} I(t-1) + \sin \frac{2t-2}{2} I(t-2) \right],$$

$$5) x(t) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t},$$

$$6) x(t) = \frac{1}{8}(3e^t - 2e^{-t} - e^{-3t}).$$

19.5.2 Турактуу коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасын чыгарууда Лапластын өзгөртүүлөрүн колдонуу

Турактуу коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases} \quad (65)$$

системасы жана

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20} \quad (66)$$

баштапкы шарттары берилсин. Эми бул системанын баштапкы шарттарды канаттандырган чыгарылышын табалы. Ал үчүн,

$$L\{x_1(t)\} = X_1(p) = X_1, \quad L\{x_2(t)\} = X_2(p) = X_2,$$

$$L\{f_1(t)\} = F_1(p) = F_1, \quad L\{f_2(t)\} = F_2(p) = F_2$$

белгилөөлөрүн киргизели. (66) баштапкы шарттарын эске алсак, анда

$$L\left\{\frac{dx_1}{dt}\right\} = pX_1 - x_{10}, \quad L\left\{\frac{dx_2}{dt}\right\} = pX_2 - x_{20}$$

болот. Эми (65) системага Лапластын өзгөртүүсүн колдонуп

$$pX_1 - x_{10} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + F_1,$$

$$pX_2 - x_{20} = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + F_2$$

системасын алабыз. Бул сызыктуу алгебралык теңдемелер системасынан $X_1(p)$ менен $X_2(p)$ ны таап, андан кийин биз издеген функцияларды аныктайбыз.

Жогорку тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасы да ушул сыяктуу чыгарылат.

Мисалдар

4).

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 3x_2 + t, & x_1(0) = 2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 5x_2 - 1, & x_2(0) = 3 \end{cases} \text{ теңдемелер системасын чыгаргыла.}$$

► $L\{x_1(t)\} = X_1(p) = X_1$, $L\{x_2(t)\} = X_2(p) = X_2$ деп белгилейли, анда

$$L\left\{\frac{dx_1}{dt}\right\} = pX_1 - 2, \quad L\left\{\frac{dx_2}{dt}\right\} = pX_2 + 3, \quad L\{t\} = \frac{1}{p^2}, \quad L\{1\} = \frac{1}{p}$$

болгондуктан, оператор методун (Лапластын өзгөртүүсүн) колдонуп

$$\begin{cases} pX_1 = X_1 - 3X_2 + \frac{1}{p^2} + 2, \\ pX_2 = X_1 + 5X_2 - \frac{1}{p} - 3 \end{cases}$$

системасын алабыз. Мындан

$$\begin{cases} (p-1)X_1 + 3X_2 = \frac{2p^2+1}{p^2}, \\ -X_1 + (p-5)X_2 = -\frac{3p+1}{p} \end{cases}$$

болот. Бул сызыктуу теңдемелер системасын Крамердин эрежеси менен чыгарабыз. Ал үчүн

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & 3 \\ -1 & p-5 \end{vmatrix} = p^2 - 6p + 8 = (p-2)(p-4),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{2p^2+1}{p^2} & 3 \\ -\frac{3p+1}{p} & p-5 \end{vmatrix} = \frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{p^2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{2p^2+1}{p^2} \\ -1 & -\frac{3p+1}{p} \end{vmatrix} = \frac{-3p^3 + 4p^2 + p + 1}{p^2}$$

аныктагычтарын эсептеп, мындан

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{p^2(p-2)(p-4)}, \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3p^3 + 4p^2 + p + 1}{p^2(p-2)(p-4)}$$

чечимдерин алабыз. Мындан (58) формуласын эске алсак, анда эки эселүү $p = 0$ жана жөнөкөй $p = 2, p = 4$ полюстарындагы ресидилердин суммасы катарында, оригинал функциялар

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left[\frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{(p-2)(p-4)} e^{pt} \right]_{p=0} + \left[\frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{p^2(p-4)} e^{pt} \right]_{p=2} + \\ &+ \left[\frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{p^2(p-2)} e^{pt} \right]_{p=4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[(6p^2 - 2p + 4)(p - 2)(p - 4)(2p^3 - p^2 + 4p - 5)(2p - 6)]e^{pt}}{p^2(p - 2)(p - 4)} \Big|_{p=0} + \\
&+ \frac{2p^3 - p^2 + 4p - 5}{(p - 2)(p - 4)} te^{pt} \Big|_{p=0} + \frac{15}{-8} e^{2t} + \frac{123}{32} e^{4t} = \frac{1}{32} - \frac{5}{8}t - \frac{15}{8} e^{2t} + \frac{123}{32} e^{4t}, \\
x_2(t) &= \left[\frac{-3p^3 + 4p^2 + p + 1}{(p - 2)(p - 4)} e^{pt} \right]_{p=0} + \left[\frac{-3p^3 + 4p^2 + p + 1}{p^2(p - 4)} e^{pt} \right]_{p=2} + \\
&+ \left[\frac{-3p^3 + 4p^2 + p + 1}{p^2(p - 2)} e^{pt} \right]_{p=4} = \\
&= \frac{(-9p^2 + 8p + 1)(p^2 - 6p + 8) - (-3p^3 + 4p^2 + p + 1)(2p - 6)}{(p - 2)^2(p - 4)^2} e^{pt} \Big|_{p=0} + \\
&+ \frac{1 + p + 4p^2 - 3p^3}{p^2 - 6p + 8} te^{pt} \Big|_{p=0} + \frac{5}{8} e^{2t} - \frac{123}{32} e^{4t} = \\
&= \frac{7}{32} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{8} e^{2t} - \frac{123}{32} e^{4t},
\end{aligned}$$

же чечимдер

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{32} - \frac{8}{5}t - \frac{15}{8} e^{2t} + \frac{123}{32} e^{4t}, \\ x_2(t) = \frac{7}{32} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{8} e^{2t} - \frac{123}{32} e^{4t} \end{cases}$$

көрүнүштөрдө табылышат. ◀

5).

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + x_3 + e^t, & x_1(0) = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3, & x_2(0) = 1, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 2x_3, \end{cases}$$

$x_3(0) = 0$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\blacktriangleright L\{x_k(t)\} = X_k(p) = X_k, \quad k = 1, 2, 3$$

болгондуктан, оператор методунун жардамы менен

$$\begin{cases} pX_1 = 2X_1 - X_2 + X_3 + \frac{1}{p-1}, \\ pX_2 = X_1 + 2X_2 - X_3 + 1, & \text{же} \\ pX_3 = X_1 - X_2 + 2X_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-2)X_1 + X_2 - X_3 = \frac{1}{p-1}, \\ -X_1 + (p-2)X_2 + X_3 = 1, \\ -X_1 + X_2 + (p-2)X_3 = 0 \end{cases}$$

теңдемелер системасын алабыз. Бул системаны Крамердин методу менен чыгаралы.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} p-2 & 1 & -1 \\ -1 & p-2 & 1 \\ -1 & 1 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^3 - (p-2) = (p-2)[(p-2)^2 - 1] = \\ &= (p-1)(p-2)(p-3), \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{p-1} & 1 & -1 \\ 1 & p-2 & 1 \\ 0 & 1 & p-2 \end{vmatrix} = \frac{(p-2)^2}{p-1} - 1 - \frac{1}{p-1} - (p-2) = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-2 & \frac{1}{p-1} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 - \frac{1}{p-1} - 1 + \frac{p-2}{p-1} =$$

$$= \frac{p^3 - 5p^2 + 8p - 6}{p - 1},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p-2 & 1 & \frac{1}{p-1} \\ -1 & p-2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{p-1} + \frac{p-2}{p-1} - (p-2) =$$

$$= \frac{-p^2 + 3p - 4}{p-1}$$

аныктагычтарын эсептеп, белгисиздерди

$$\begin{cases} X_1 = \frac{2}{(p-1)(p-2)(p-3)}, \\ X_2 = \frac{p^3 - 5p^2 + 8p - 6}{(p-1)^2(p-2)(p-3)} = \frac{p^2 - 2p + 2}{(p-1)^2(p-2)}, \\ X_3 = \frac{-p^2 + 3p - 4}{(p-1)^2(p-2)(p-3)} \end{cases}$$

аныктап, аларга (58) формуланы колдонсок, анда

$$x_1(t) = \left[-\frac{2e^{pt}}{(p-2)(p-3)} \right]_{p=1} + \left[-\frac{2e^{pt}}{(p-1)(p-3)} \right]_{p=2} +$$

$$+ \left[-\frac{2e^{pt}}{(p-1)(p-2)} \right]_{p=3} = -e^t + 2e^{2t} - e^{3t},$$

$$x_2(t) = \left[\frac{p^2 - 2p + 2}{p-2} e^{pt} \right]_{p=1} + \left[\frac{p^2 - 2p + 2}{(p-1)^2} e^{pt} \right]_{p=2} =$$

$$= \left[\frac{(2p-2)(p-2) - (p^2 - 2p + 2)}{(p-2)^2} e^{pt} + \frac{p^2 - 2p + 2}{p-2} te^{pt} \right]_{p=1} + 2e^{2t} =$$

$$= \left[\frac{p^2 - 4p + 2}{(p-2)^2} e^{pt} + \frac{p^2 - 2p + 2}{p-2} te^{pt} \right]_{p=1} + 2e^{2t} = -e^t - te^t + 2e^{2t},$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \left[\frac{-p^2 + 3p - 4}{(p-2)(p-3)} e^{pt} \right]_{p=1} + \left[\frac{-p^2 + 3p - 4}{(p-1)^2(p-3)} e^{pt} \right]_{p=2} + \\
&+ \left[\frac{-p^2 + 3p - 4}{(p-1)^2(p-2)} e^{pt} \right]_{p=3} = \\
&= \left[\frac{(-2p+3)(p^2-5p+6) - (-p^2+3p-4)(2p-5)}{(p^2-5p+6)^2} e^{pt} + \right. \\
&\left. + \frac{3p-4-p^2}{(p-2)(p-3)} te^{pt} \right]_{p=1} + \frac{-2}{-1} e^{2t} + \frac{-4}{4} e^{3t} = -e^t - te^t + 2e^{2t} - e^{3t},
\end{aligned}$$

же

$$\begin{cases}
x_1(t) = -e^t + 2e^{2t} - e^{3t}, \\
x_2(t) = -e^t - te^t + 2e^{2t}, \\
x_3(t) = -e^t - te^t + 2e^{2t} - e^{3t}
\end{cases}$$

чечимдери табылат. ◀

$$6). \begin{cases}
x_1''(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t), & x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \\
x_2''(t) = -x_1(t) - x_2(t), & x_2(0) = 3, \quad x_2'(0) = 1
\end{cases}$$

теңдемелер системасын чыгаргыла.

1 – ыкма. ▶ Берилген теңдемелер системасына Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонсок, анын оң жактары

$$L\{x_1''(t)\} = p^2 X_1(p) - p_1 x_1(0) - x_1'(0) = p^2 X_1 - p,$$

$$L\{x_2''(t)\} = p^2 X_2(p) - p_1 x_2(0) - x_2'(0) = p^2 X_2 - p$$

көрүнүшүнө өзгөргөндүктөн, системаны оператор методуна таянып,

$$\begin{cases}
p^2 X_1 = 3X_1 + 4X_2 + p, \\
p^2 X_2 = -X_1 - X_2 + 3p + 1
\end{cases}$$

$$\text{же } \begin{cases} (p^2 - 3)X_1 - 4X_2 = p, \\ X_1 + (p^2 + 1)X_2 = 3p + 1 \end{cases}$$

абалына келтиребиз. Бул системаны Крамердин эрежеси менен чыгарабыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 - 3 & -4 \\ 1 & p^2 + 1 \end{vmatrix} = p^4 - 2p^2 + 1 = (p - 1)^2 (p + 1)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p & -4 \\ 3p + 1 & p^2 + 1 \end{vmatrix} = p^3 + 13p + 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p^2 - 3 & p \\ 1 & 3p + 1 \end{vmatrix} = 3p^3 + p^2 - 10p - 3 \text{ аныктагычтарын эсептеп,}$$

белгисиздерди

$$X_1 = \frac{p^3 + 13p + 4}{(p - 1)^2 (p + 1)^2},$$

$$X_2 = \frac{3p^3 + p^2 - 10p - 3}{(p - 1)^2 (p + 1)^2} \text{ табабыз.}$$

Оболу X_1 ди жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында

$$X_1 = \frac{p^3 + 13p + 4}{(p - 1)^2 (p + 1)^2} = \frac{A}{(p - 1)^2} + \frac{B}{p - 1} + \frac{C}{(p + 1)^2} + \frac{D}{p + 1} \text{ ажыратып жазып,}$$

белгисиз коэффициенттерди аныктайлы. Алымдарын теңдештирип

$$A(p + 1)^2 + B(p - 1)(p + 1)^2 + C(p - 1)^2 + D(p + 1)(p - 1)^2 = p^3 + 13p + 4$$

барабардыгын алабыз. Мындан $p = 1$ маанисин койсок

$$4A = 18, \quad A = 9/2$$

табылат. Ал эми $p = -1$ маанисин койсок,

$$4C = -10, \quad C = -5/2$$

табылат. Эми p нын бирдей даражадагы коэффициенттерин теңдесек,

$$B + D = 1, \quad B = -\frac{1}{2},$$

$$A + B + C - D = 0, \quad D = \frac{3}{2}$$

болот. Мындан ресидилер теориясына шилтеме жасап,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{9}{2} \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)} + \frac{5}{2} \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{p+1} = \\ &= L \left\{ \frac{9}{2} t e^t - \frac{1}{2} e^t - \frac{5}{2} t e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-t} \right\} \end{aligned}$$

же

$$x_1(t) = \frac{9t-1}{2} e^t + \frac{3-5t}{2} e^{-t}$$

чыгарылышын табабыз.

Ушундай эле жол менен экинчи

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{9}{4} t e^t + \frac{5}{2} e^t + \frac{5}{4} t e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} \\ &= \frac{10-9t}{4} e^t + \frac{5t+2}{4} e^{-t} \end{aligned}$$

чыгарылыш табылат. Демек

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{9t-1}{2} e^t + \frac{3-5t}{2} e^{-t} \\ x_2(t) = \frac{10-9t}{4} e^t + \frac{5t+2}{4} e^{-t} \end{cases}$$

болот. ◀

2 – ыкма. ► Эми аныкталбаган коэффициенттер методун жана Лапластын тескери өзгөртүүсүн колдонолу. Ал үчүн берилген сүрөттөлүү функцияларын жөнөкөй бөлчөктөргө ажыраталы:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \left[\frac{p^3 + 13p + 4}{(p+1)^2} e^{pt} \right]_{p=1}' + \left[\frac{p^3 + 13p + 4}{(p-1)^2} e^{pt} \right]_{p=-1}' = \\
 &= \left[\frac{(3p^2 + 13)(p+1) - (p^3 + 13p + 4)2}{(p-1)^3} e^{pt} + \frac{p^3 + 13p + 4}{(p+1)^2} te^{pt} \right]_{p=1}' + \\
 &+ \left[\frac{(3p^2 + 13)(p-1) - (p^3 + 13p + 4)2}{(p-1)^3} e^{pt} + \frac{p^3 + 13p + 4}{(p-1)^2} te^{pt} \right]_{p=-1}' = \\
 &= -\frac{1}{2} e^t + \frac{9}{2} te^t + \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{5}{2} te^{-t} = \frac{9t-1}{2} e^t + \frac{3-5t}{2} e^{-t}, \\
 x_2(t) &= \left[\frac{3p^3 + p^2 - 10p - 3}{(p+1)^2} e^{pt} \right]_{p=1}' + \left[\frac{3p^3 + p^2 - 10p - 3}{(p-1)^2} e^{pt} \right]_{p=-1}' = \\
 &= \left[\frac{(9p^2 + 2p - 10)(p+1) - (3p^3 + p^2 - 10p - 3)2}{(p+1)^3} e^{pt} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3p^3 + p^2 - 10p - 3}{(p+1)^2} te^{pt} \right]_{p=1}' + \\
 &+ \left[\frac{(9p^2 + 2p - 10)(p-1) - (3p^3 + p^2 - 10p - 3)2}{(p-1)^3} e^{pt} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3p^3 + p^2 - 10p - 3}{(p-1)^2} te^{pt} \right]_{p=-1}' = \frac{5}{2} e^t - \frac{9}{4} te^t + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{5}{4} te^{-t} = \\
 &= \frac{10-9t}{4} e^t + \frac{5t+2}{4} e^{-t}
 \end{aligned}$$

же чечимдер

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{9t-1}{2}e^t + \frac{3-5t}{2}e^{-t}, \\ x_2(t) = \frac{10-9t}{4}e^t + \frac{5t+2}{4}e^{-t} \end{cases}$$

көрүнүштөрдө табылат. ◀

11. КӨНҮГҮҮЛӨР

Төмөнкү теңдемелер системасын чыгаргыла:

$$1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, & x_1(0) = 1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 + e^t, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 = -x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2 = 2x_1 - 2x_2, & x_2(0) = 1, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + 1, & x_1(0) = 1, \\ x_2 = x_1 + x_3 + 1, & x_2(0) = -1 \\ x_3 = x_1 + x_2, & x_3(0) = 0, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3, & x_1(0) = 0, \\ x_2 = 3x_1 + x_3, & x_2(0) = 1, \\ x_3 = 3x_1 + x_2, & x_3(0) = 1, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1'' + x_2' + x_1 = 1, & x_1(0) = 1, & x_1'(0) = 1, \\ x_1' + x_2'' = e^t, & x_2(0) = 1, & x_2'(0) = 1, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1' - x_2' - 2x_1 + 2x_2 = 1 - 2t, & x_1(0) = 0, & x_1'(0) = 0, \\ x_1'' + 2x_2' + x_1 = 0, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Жооптору:

$$1) x_1(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}, \quad x_2(t) = \frac{1}{4}(e^{-t} - e^{3t}).$$

$$2) x_1(t) = e^t (\cos t - 2\sin t), \quad x_2(t) = e^t (\cos t + 3\sin t).$$

$$3) x_1(t) = 1 - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}, \quad x_2(t) = -1 + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}, \quad x_3(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{2t}).$$

$$4) x_1(t) = \frac{2}{5}(e^{3t} - e^{2t}), \quad x_2(t) = \frac{1}{5}(2e^{-2t} + 3e^{3t}), \quad x_3(t) = \frac{1}{5}(2e^{-2t} + 3e^{3t}).$$

$$5) x_1(t) = 2 - e^t, \quad x_2(t) = 2e^t - 2 - t.$$

$$6) x_1(t) = 2 - 2(t+1)e^{-t}, \quad x_2(t) = 2 - t - 2(t+1)e^{-t}.$$

§ 19.6 Дюамелдин интегралы жана анын колдонулуштары

Айталы $f(t)$, $\varphi(t)$ функциялары тиешелүү түрдө

$L\{f(t)\} = F(p)$ жана $L\{\varphi(t)\} = \Phi(p)$ көрүнүштөрдөгү Лапластык элестерге ээ болушсун. $pF(p)$ туюнтмасын

$$pF(p) = pF(p) - f(0) + f(0)$$

же

$$pF(p) = f(0) + [pF(p) - f(0)]$$

көрүнүштө жазып, акыркынын эки тарабын тең $\Phi(p)$ га көбөйтсөк

$$pF(p)\Phi(p) = f(0)\Phi(p) + [pF(p) - f(0)]\Phi(p)$$

келип чыгат. Мындан $L\{f'(t)\} = [pF(p) - f(0)]$ формуласын эске алып,

$$pF(p)\Phi(p) = f(0)\Phi(p) + L\{f'(t)\}\Phi(p)$$

теңдештигин алабыз. Ага Лапластын тескери өзгөртүүсүн колдонуп,

$$L^{-1}\{pF(p)\Phi(p)\} = f(0)\varphi(t) + \int_0^t f'(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \quad (67)$$

формуласына ээ болобуз. Бул формула Дюамелдин формуласы, ал эми формуланын оң тарабы Дюамелдин интегралы деп аталат.

КОЛДОНУЛУШУ:

Берилген

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (68)$$

дифференциалдык теңдеменин

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

баштапкы шарттарын канаттандырган чыгарылышын тапкыла.

► $z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0$

баштапкы шарттары менен бирге башка бир жардамчы

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1 \quad (69)$$

дифференциалдык теңдемесин карайлы. Лаплас боюнча сүрөттөлүү функцияларын төмөндөгүдөй

$$L\{x(t)\} = X(p), \quad L\{z(t)\} = Z(p),$$

$$L\{f(t)\} = F(p), \quad L\{1\} = \frac{1}{p}$$

белгилеп (68) жана (69) га Лапластын өзгөртүүсүн жүргүзсөк,

теңдемелер баштапкы шарттары менен бирге

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Z(p) = \frac{1}{p}$$

теңдемелер системасына келтирилет. Бул системага

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = Q_n(p)$$

белгилөөсүн киргизип,

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \quad Q_n(p) = \frac{1}{pZ(p)}$$

формулаларын алабыз. Мындан

$$X(p) = pF(p)Z(p)$$

туюнтмасына ээ болобуз. Акыркы формулага Дюамелдин формуласын колдонсок, анда

$$x(t) = f(0)z(t) + \int_0^t f'(\tau)z(t - \tau) d\tau \quad (70)$$

же

$$x(t) = \int_0^t z'(\tau)f(t - \tau) d\tau \quad (71)$$

келип чыгат.

Жыйынтык: Эгерде нөлдүк баштапкы шарттарына ээ, бош мөчөсү (оң тарабы) бирге барабар болгон дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы белгилүү болсо, анда аны менен чогуу каралуучу нөлдүк баштапкы шарттары менен берилген, бош мүчөсү ар кандай болгон сызыктуу дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы (70) же (71) формулалары аркылуу табылат.

1). Баштапкы шарты $x(0) = 0$ болгон $x'(t) + x(t) = t$ дифференциалдык теңдемесин чыгаргыла.

► Мурда $z' + z = 1$, $z(0) = 0$ жардамчы дифференциалдык теңдемени чыгаралы. Ал үчүн бул теңдемеге Лапластын өзгөртүүсүн колдонсок, анда

$$(p + 1) Z(p) = \frac{1}{p} \quad \text{же} \quad Z(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

$$\text{же} \quad Z(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

келип чыгат. Мындан, Лапластын тескери өзгөртүүсүн колдонуп

$$z(t) = 1 - e^{-t}$$

функциясын аныктайбыз. Анда (70) формуланын негизинде

$$x(t) = \int_0^t [1 - e^{-(t-\tau)}] d\tau = [\tau - e^{-(t-\tau)}]_0^t = t - 1 + e^{-t}$$

$$\text{же} \quad x(t) = t + e^{-t} - 1$$

чечимин табабыз. ◀

12. КӨНҮГҮҮЛӨР

Дюамелдин формуласынын жардамы менен төмөнкү дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

$$1) \quad x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2 + 1}, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

$$2) \quad x'' + x = \frac{1}{\cos^2(t)}, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Жооптору:

$$1) \quad x(t) = e^1 \left[\operatorname{arctgt} - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right]$$

$$2) \quad x(t) = \frac{\sin^2 t}{2 \cos t}$$

§ 19.7 Импульстук функциялар жана алардын Лаплас боюнча элестери

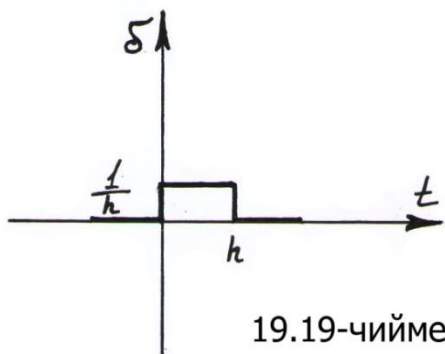
Импульстук функциялар кайсы бир кубулуштарды математикалык моделдештирүүгө ылайыкташтырылып түзүлгөн, илимде жана техникада кеңири колдонулган атайын функциялар болушкандыктан, функциянын классикалык аныктамасы менен берилбейт (2 – бөлүк, § 6.2).

Азыр

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [I(t) - I(t - h)] = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{эгерде } t < h, \\ 0, & \text{эгерде } t > h \end{cases} \quad (62)$$

көрүнүштө берилген функцияны карайлы. (62) функциянын графиги жана $\overline{0t}$, $\overline{0\delta}$ координаттык октору менен чектелген фигуранын аянты 1 ге барабар (19.19 – чийме).

19.5 Аныктама. $h \rightarrow 0$ умтулганда аныкталган



$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h)$$

функциясын, дельта – функция же нөлүнчү тартиптеги импульстук функция деп атайбыз.

Бул функциянын $t = 0$ болгондогу мааниси ∞ , ал эми $t \neq 0$ болгондогу мааниси 0 болот. Бирок, функциянын графиги жана $\overline{0t}$, $\overline{0\delta}$ октору менен чектелген фигуранын аянты 1 ге барабар.

Бул функцияга төмөнкүдөй механикалык түшүнүк берсек болот. Берилген h убактысынын аралыгында $\delta(t, h)$ күчүн чоңдугу $\frac{1}{h}$ ка

барабар болсун. Анда ар кандай h үчүн бул күчтүн импульсу 1 ге барабар болот.

Мындан $\delta(t)$ дельта – функциясы $t=0$ үчүн чексизге барабар болгон күчтү аныктайт, ал эми $t \neq 0$ болгондо нөлгө барабар күчтү аныктайт. Демек, $\delta(t)$ – чексиз чоң күч жана ал күч убакыттын $t=0$ моментинде массасы 1 ге барабар болгон материалдык чекитке таралат.

Бул $\delta(t)$ – дельта функциянын, б.а. нөлүнчү тартиптеги импульстук функциянын Лаплас боюнча өзгөртүүсүн табалы:

$$L\{\delta(t, h)\} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-hp} \right]$$

болгондуктан, $h \rightarrow 0$ умтулганда

$$L\{\delta(t, h)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-hp}}{h} = 1$$

же $\delta(t)$ – дельта функциянын же нөлүнчү тартиптеги импульстук функциянын Лаплас боюнча элеси

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

саны болот.

Биринчи тартиптеги импульстук функцияны аныктоо үчүн

$$\begin{aligned} \delta_1(t, h) &= \frac{1}{h} [\delta(t, h) - \delta(t - h, h)] = \\ &= \frac{1}{h} [I(t) - 2I(t - h) + I(t - 2h)] = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{h^2}, & \text{эгерде } t < h, \\ -\frac{1}{h^2}, & \text{эгерде } h < t < 2h, \\ 0, & \text{эгерде } t > 2h \end{cases}$$

көрүнүштөгү жардамчы функцияны киргизебиз.

19.6 Аныктама. (Биринчи тартиптеги импульстук функция)

$$\delta_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_1(t, h)$$

көрүнүшүндө аныкталган функция, биринчи түрдөгү импульстук функция деп аталат. Мында $\delta_1(t, h)$ жардамчы функциясын Лаплас боюнча өзгөртүүсү

$$L\{\delta_1(t, h)\} = \frac{1}{ph^2} [1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}]$$

көрүнүшүндө болгондуктан, $\delta_1(t)$ нын Лаплас боюнча өзгөртүүсү ($h \rightarrow 0$ умтулганда)

$$\begin{aligned} L\{\delta_1(t, h)\} &= \frac{1}{p} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}}{h^2} = \frac{1}{p} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2pe^{-ph} - 2pe^{-2ph}}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-ph} - e^{-2ph}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [-pe^{-ph} + 2pe^{-2ph}] = p \end{aligned}$$

же

$$L\{\delta_1(t)\} = p$$

көрүнүштө табылат.

Жогорудагыдай жол менен ар кандай $n \in \mathbb{N}$ үчүн n – тартиптеги импульстук $\delta_n(t)$ функциясын аныктоого болот. Бул учурда

$$L\{\delta_n(t)\} = p^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

формуласы аткарылат ($\delta_0(t) = \delta(t)$). Мында $1(t)$ – бирдик функциясын туундусу $\delta(t)$ га тең, б.а.

$$I'(t) = \delta(t)$$

орун алат. Мисалы

1). Ар кандай τ - турактуу саны үчүн

$$x''(t) - x(t) = 2\delta(t - \tau), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

дифференциалдык теңдемесин чыгаргыла.

► $L\{\delta(t)\} = 1$ болгондуктан,

$$L\{\delta(t - \tau)\} = e^{-p\tau}$$

болот. Берилген теңдемеге Лапластын өзгөртүүсүн колдонуп

$$(p^2 - 1)X(p) = 2e^{-p\tau}$$

$$X(p) = \frac{2}{p^2 - 1} e^{-p\tau}$$

барабардыгын алабыз. Мындан Лапластын тескери өзгөртүүсүн колдонуп

$$x(t) = 2sh(t - \tau)I(t - \tau)$$

чечимине ээ болобуз. ◀

§ 19.8 Лапластын өзгөртүүсүн электротехникадагы айрым колдонулуштары

Электротехникада, электр чынжырларындагы эсептөөлөрдө Лапластын өзгөртүүсү кеңири колдонулат. Операциондук эсептөөлөрдү эң биринчи электротехникада англис инженери Хейвисайд колдонгон.

19.20 – чиймедеги термелүү контурун теңдемеси

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \left[q_0 + \int_0^t i \cdot dt \right] = V(t) \quad (63)$$

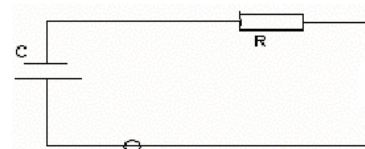
көрүнүштө жазууга болот. Мында L – индуктивдүүлүк, R – каршылык, C – сыйымдуулук, $V(t)$ – чыңалуу, i – ток күчү жана q_0 – убакыттын баштапкы ирмеминдеги конденсатордун пластинкасындагы заряд.

Эми

$$L\{i(t)\} = \dot{I}(p) = I,$$

$$L\{v(t)\} = V(p) = V,$$

$$L\left\{\frac{di}{dt}\right\} = p\dot{I}(p) - i_0$$



19.20 – чийме

белгилөөлөрүн киргизип, (63) теңдемесине Лапластын өзгөртүүсүн колдонсок, анда

$$L(p\dot{I}(p) - i_0) + R\dot{I}(p) + \frac{q_0}{Cp} + \frac{\dot{I}(p)}{Cp} = V(p)$$

же

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp} \right) \dot{I}(p) = V(p) + L i_0 - \frac{q_0}{Cp} \quad (64)$$

теңдемеси келип чыгат. Мында i_0 – убакыттын баштапкы моментиндеги ток, $\dot{I}(p)$ - оператордук ток, $V(p)$ – оператордук чыңалуу.

(64) теңдемеде $\dot{I}(p)$ – нин коэффициенттери болгон

$Lp + R + \frac{1}{Cp} = Z(p)$ саны **контурдун оператордук каршылыгы** деп аталат.

(64) дөн $i(p)$ ны

$$i(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} + \frac{LCi_0p - q_0}{CpZ(p)} \quad (65)$$

көрүнүштө аныктоого болот. (65) формуласы $i_0 = 0, q_0 = 0$ нөлдүк баштапкы шарттарында Омдун законун оператордук формасы деп аталат. Ал эми (65) формуладагы экинчи $\frac{LCi_0p - q_0}{CpZ(p)}$ кошулуучу токту *кыска туюктануусун оператордук формасы* деп аталат.

Татаал электр чынжырларын кароодон мурда, турактуу ток үчүн Кирхгофтун закондоруна кайрылалы.

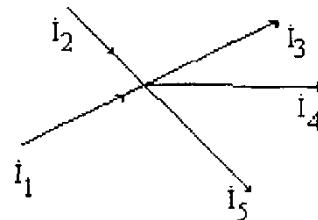
КИРХГОФТУН БИРИНЧИ ЗАКОНУ:

Чынжырдын ар бир чекитине келген токтордун алгебралык суммасы нөлгө барабар.

Мисалы, 19.21 – чиймеде ток күчтөрүн

$$i_1 + i_2 - i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

суммасы нөлгө тең болгон чынжыр берилген.

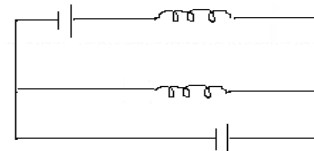


19.21 – чийме

КИРХГОФТУН ЭКИНЧИ ЗАКОНУ:

Чынжырлардын туюк контуру үчүн контурдун айрым тармактарындагы чыңалуулардын төмөндөөлөрүнүн алгебралык суммасы нөлгө барабар (19.22 – чийме).

Эгерде чынжырдын каршылыгын оператордук каршылык менен алмаштырсак,



анда R – каршылыгы, C – сыйымдуулугу

19.22 – чийме

жана L – индуктивдүүлүгү болгон контурдун тиешелүү бөлүктөрүндөгү оператордук каршылыктарды ($i_0 = 0, q_0 = 0$ болгон шарттарда)

$$Z_R(p) = R,$$

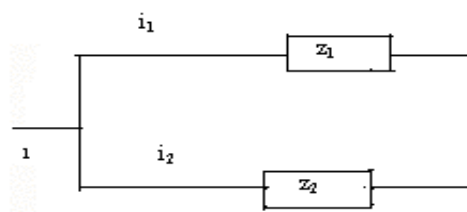
$$Z_C(p) = \frac{1}{Cp},$$

$$Z_L(p) = Lp$$

көрүнүштөрдө табууга болот, б.а. өзгөрүлмө ток үчүн Кирхгорфтун закону оператордук формада аткарылат. Чынжырларды удаалаш туташтырсак, анда оператордук каршылыктар кошулушат.

Эми чынжырларды параллель туташтыргандагы учурга токтололу (19.23 – чийме): Мында $i_1 = \frac{V}{Z_1}, i_2 = \frac{V}{Z_2},$

$$i = \frac{V}{Z} \text{ жана}$$



$$i_1 + i_2 = i \text{ болгондуктан}$$

19.23 – чийме

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = \frac{V}{Z}$$

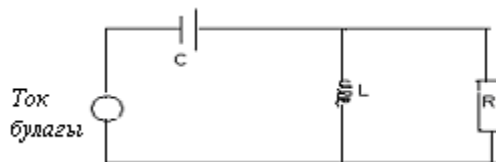
болот. Мындан

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

же

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

туюнтуусун алабыз. Мында Z толук каршылык.



19.24 – чийме

Мисалдар

1). 19.24 – чийме менен берилген контурдун оператордук тогун тапкыла. Мында убакыттын $t = 0$ учурунда чынжырдын чыңалуусу турактуу, E болот

► Индуктор менен резистордон турган участкактун оператордук каршылыгын табалы.

Бул учурда бардык чынжырлардын каршылыгы

$$Z = Z_C + Z_L = \frac{1}{Cp} + \frac{LRp}{Lp + R} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{Cp(Lp + R)}$$

көрүнүштө эсептелет. Омдун законун эске алсак, оператордук ток

$$i(p) = \frac{V(p)}{Z(p)} = \frac{EC(Lp + R)}{LCRp^2 + Lp + R}$$

формуласы менен аныкталат. Мында $E = pV$. ◀

Практикалык эсептөөлөрдө колдонууга ыңгайлаштырып Лапластын өзгөртүүсүн элестерин жана негизги касиеттерин жыйынтыкталган таблицаларын түзөбүз:

Айрым элементардык оригинал функциялардын Лапластык элестери

2 –таблица.

	$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	1	$\frac{1}{p}, \quad \text{Re} p > 0$
2	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}, \quad \text{Re} p > 0$
3	t	$\frac{1}{p^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re} \lambda$
4	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re} p > 0$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re} p > 0$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re} p > 0$
7	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$
8	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$
9	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \lambda$
10	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \text{Re} p > 0$
11	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \text{Re} p > 0$
12	$e^{\lambda t} \text{ch } \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$
13	$e^{\lambda t} \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$
14	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \text{Re} p > 0$
15	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad \text{Re} p > 0$
16	$t \text{ch } \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$
17	$t \text{sh } \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 - \omega^2)^2}, \quad \text{Re} p > \text{Re } \omega$

Лапластын өзгөртүүсүн касиеттери

$f(t)$ – оригинал функция үчүн, $L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ - Лапластын

өзгөртүүсү төмөнкү касиеттерге ээ:

3 – таблица.

1. $L\{\alpha f(t) + \beta \varphi(t)\} = \alpha F(p) + \beta \Phi(p)$ – сызыктуулук касиети

(α, β - ар кандай комплекстик сандар);

2. $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a > 0$ - окшоштук;

3. $L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$ - оригинал функциядан туунду алуу касиети

$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$;

4. $L\{-tf(t)\} = F'(p)$ - сүрөттөлүү функциядан туунду алуу касиети

$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$;

5. $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$ - оригинал функциядан интеграл алуу касиети;

6. $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^{\infty} F(z) dz$ - элес функциядан интеграл алуу касиети;

7. $L\{f(t - \omega)\} = e^{-p\omega} F(p)$, $\omega \geq 0$ кечикме касиети;

8. $L\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(p - \lambda)$ (Мында λ - каалаган параметр).

9. $L\left\{\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau\right\} = L\{f(t) * \varphi(t)\} = F(p)\Phi(p)$ - өзгөртүүнүн көбөйтүү

касиети;

10. $L\left\{\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right\} = \frac{\partial F(p, x)}{\partial x}$ - параметр боюнча туунду алуу касиети:

11. $f(t+T) = f(t)$ ise $L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^{\infty} f(t) dt$

12. $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dt$ Лапластын тескери өзгөртүүсү.

XX ГЛАВА. ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕР

§ 20.1 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер теориясына киришүү

20.1.1 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер түшүнүгү

Жаратылыштагы көптөгөн кубулуштардын өзгөрүү закондору жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер менен моделдештирилет, анткени туюмубузда курчап турган чөйрөдөгү кубулуштар, эки жана үч өлчөмдүү мейкиндиктерде жүргөндөй кабыл алынат же сезилет. Ошондуктан, аларды эки же андан көп өзгөрүлмөлүү белгисиз функциялар жана алардын туундулары менен гана сүрөттөй алабыз. Мисал катары кванттык механикадагы Шрёдингердин теңдемесин, Ньютондун кыймылдар жана жылуулук алмашуулар жөнүндөгү теңдемелерин, агымдар боюнча Навье – Стокстун теңдемесин жана ошондой эле Максвелдин теңдемесин айта кетсек болот.

Ошентип, кадимки дифференциалдык теңдемеде (КДТ) белгисиз функция жана анын туундулары бир өзгөрүлмөлүү болсо, жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеде (ЖТДТ) белгисиз функция жана анын жекече туундулары эки же андан көп өзгөрүлмөлүү болушат. Мисалы x чекитиндеги температураны, чекиттин x координатасынан жана ченөө убактысы t дан көз каранды болгон эки өзгөрүлмөлүү $u(x, t)$ функциясы менен мүнөздөөгө болот.

Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге катышкан жекече туундуларды, ыңгайына жараша

$$u_t \text{ же } \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x \text{ же } \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} \text{ же } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} \text{ же } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

белгилөөлөрүн бирөөсү менен жазып көрсөтөбүз.

1. *Сызыктуулук*: Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеде белгисиз функция жана анын бардык жекече туундулары сызыктуу абалда катышышса, б.а. кайсы бир функциянын суперпозициясы

болбосо же бири – бирине көбөйтүлгөн, даражага көтөрүлгөн абалдарда болушпаса, анда аны **сызыктуу ЖТДТ** дейбиз, ал эми теңдеме белгисиз функциянын бардык эң жогорку тартиптеги жекече туундуларына карата гана сызыктуу болсо, анда аны **квазисызыктуу** дифференциалдык теңдеме деп атайбыз.

2. *Тартиби*: Теңдемедеги белгисиз функциянын жекече туундуларын эң жогорку тартиби ЖТДТ нын **тартиби** деп аталат.

3. Жалпы учурда x, y – көз каранды эмес эки өзгөрүлмөлүү экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемени

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F u = G \quad (1)$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында A, B, C, D, E, F, G – турактуу сандар же болбосо x, y өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болгон белгилүү функциялар болушат.

4. *Бир тектүүлүк*: Эгерде $G(x, y) \neq 0$ болсо, анда (1) бир тектүү эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, ал эми $G(x, y) = 0$ болгондо бир тектүү ЖТДТ деп аталышат.

5. *Коэффициенттерин түрлөрү*: A, B, C, D, E, F, G – теңдеменин коэффициенттери деп аталышып, алар белгилүү турактуу сандар болгондо (1) турактуу коэффициенттүү, ал эми белгилүү функциялар болгондо өзгөрүлмө коэффициенттүү жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Мисалдар

$u_x u_{xx} + u_{yy} u_y + u^2 = 0$ теңдемеси $u(x, y)$ белгисиз функциясына карата экинчи тартиптеги сызыктуу эмес, бирок квазисызыктуу бир тектүү ЖТДТ;

$u_x + E(x, y)u_y = 2u$ теңдемеси $u(x, y)$ белгисиз функциясына карата биринчи тартиптеги өзгөрүлмө коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу ЖТДТ;

$u_{xx} + uu_{yy} = 0$ теңдемеси экинчи тартиптеги бир тектүү сызыктуу ЖТДТ;

$xu_x + uu_y + \sin(xy) = 0$ теңдемеси биринчи тартиптеги бир тектүү эмес сызыктуу ЖТДТ;

$(u_{tt})^2 = e^t u_x + G(x, y)$ теңдемеси бир тектүү эмес жана сызыктуу эмес экинчи тартиптеги ЖТДТ.

6. Экинчи тартиптеги сызыктуу ЖТДТ нын түрлөрү. (1) теңдемесин жогорку тартиптеги туундуларын алдындагы А, В, С коэффициенттерин тандалышына карата үч түргө бөлүнүшөт:

I. $B^2 - 4AC = 0$ болгондо *параболалык теңдеме* деп аталып, негизинен жылуулук өткөрүмдүүлүк жана диффузия процесстерин сүрөттөйт.

II. $B^2 - 4AC > 0$ болгондо *гипербоалык теңдеме* деп аталып, негизинен термелүү системаларын жана толкундуу кыймыл процесстерин сүрөттөйт.

III. $B^2 - 4AC < 0$ болгондо *эллиптикалык теңдеме* деп аталып, негизинен убакыттын өтүшү менен өзгөрбөгөн стационардык процесстерди сүрөттөйт.

Мисалдар

Бир өлчөмдүү мейкиндикте эки өзгөрүлмөлүү $u(x, t)$ белгисиз функцияга карата:

а) $u_t = u_{xx}$ параболалык теңдеме, анткени

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 0.$$

б) $u_{tt} = u_{xx}$ гипербоалык теңдеме, анткени

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1) = 4 > 0.$$

в) $u_{xy} = 0$ гипербоалык теңдеме, анткени

$$B^2 - 4AC = 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 > 0.$$

г) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ эллиптикалык теңдеме, анткени

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0.$$

Үч өлчөмдүү мейкиндикте төрт өзгөрүлмөлүү $u(t, x, y, z)$ белгисиз функцияга карата эң жөнөкөй каноникалык формада жазылган төмөндөгү теңдемелер:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ же } u_{tt} = \Delta u \text{ гиперболалык,} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ же } u_t = \Delta u \text{ параболалык,} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \text{ же } \Delta u = 0 \text{ эллиптикалык} \end{aligned}$$

түрлөргө киришет. Мында $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Лапластын оператору, t – убакыт, $M(x; y; z)$ – үч өлчөмдүү мейкиндиктеги областтын чекити.

(ЖТДТ) ны каноникалык формада жазуу локалдык мүнөзгө ээ болуп, кайсы бир $M(x_0; y_0; z_0)$ чекитинин жакынкы аймакчасында гана теңдеменин каноникалык жазылуу формасын сакталышына кепилдик берилет.

Эскертүү. (1) теңдемесинде $u(x, y)$ функциясын x боюнча туундуларын тартибин: ξ нин алгебралык даража көрсөткүчү, ал эми y боюнча туундулардын тартибин: η нын алгебралык даража көрсөткүчү деп элестетип, аны формалдуу түрдө $O\xi\eta$ координаттык тегиздигинде жайгашкан

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + E\eta + G = 0, \quad (2)$$

экинчи тартиптеги ийринин теңдемесине салыштырууга (“Жогорку математика боюнча окума” – 1 бөлүк, §4.1 - §4.2) болот. $O\xi\eta$ координаттык системасын параллель которуу жана буруу менен (2) теңдемеден, 9 түргө бөлүнгөн экинчи тартиптеги ийрилердин каноникалык теңдемелерин түзүүгө болорун жана алардын негизгилери болуп эллипс, гипербола, парабола ийрилери эсептелерин билебиз. Ошентип, каноникалык абалга келтирилген экинчи тартиптеги ийринин теңдемесинде ξ менен η нын ордуна кайрадан $u(x, y)$ функциясын тиешелүү туундуларын коюп, жалпы учур үчүн жазылган (1) жекече туундулуу дифференциалдык теңдемесин жазылуу формасына карата параболалык, гиперболалык, эллиптикалык деп, формалдуу үч түрдөгү теңдемеге бөлүштүрөбүз. Бирок, ЖТДТ лер квадраттык форманын жазылуу түрүнө окшоштурулуп формалдуу бөлүштүрүлгөнү менен, түрүнө жараша ар башка кубулуштарды сүрөттөрүн эске тутабыз.

1. Көнүгүүлөр

1. Төмөндөгү теңдемелерди сызыктуулугун, тегин, тартибин жана кайсы түргө кирерин аныктагыла:

а) $u_t = u_{xx} + 2u_x + u$,

б) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$,

в) $u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = \sin x$,

г) $u_{tt} = uu_{xxx} + e^{-t}$.

2. Эгерде $u_1(x, y)$ жана $u_2(x, y)$ функциялары (1) теңдеменин чыгарылыштары болушса, анда алардын суммасы да (1) теңдемеге чыгарылыш болорун далилдегиле.

3. Төмөндөгү теңдемелердин жалпы чыгарылыштарын тапкыла:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x}$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}$;

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$; е) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4. Төмөндөгү теңдемелердин параболалык, гиперболалык, эллиптикалык областтарын тапкыла:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + 1$.

5. Эң жөнөкөй ЖТДТ лардын бири болгон

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

теңдемесине чыгарылыш болгон бардык функцияларды тапкыла.

Жооптор.

3. а) $u(x, y) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) e^y$; б) $u(x, y) = e^{y^2} \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$;

с) $u(x, y) = e^{x+y} + \Phi_1(x)y + \Phi_2(x)$;

д) $u(x, y) = \frac{\Phi_1(x)}{x} + \Phi_2(x)$.

е) $u(x, y) = e^{x+y} + \Phi_1(x)y + \Phi_2(x)$.

4. а) Бардык чекиттерде гиперболалык теңдеме; б) $x^2 - y > 0$ областында гиперболалык, $x^2 - y < 0$ областында эллиптикалык, ал эми $x^2 - y = 0$ же $y = x^2$ чекиттеринде параболалык теңдеме болот.

20.1.2 Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу ыкмалары

Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди үйрөнүүгө киришүүдөн мурда, аларды чыгаруунун кандай ыкмалары бар экендигин билип алалы. Албетте, ЖТДТ ларды чыгаруунун көптөгөн ыкмалары болгону менен, алардын ичинен практикалык жактан колдонууга ыңгайлуу болгон он ыкмаларга токтолуп өтөбүз. Алар, көбүнчө ЖТДТ ларды кадимки дифференциалдык теңдемелерге өзгөртүп түзүүгө негизделишкен:

1. *Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу усулу.* n сандагы көз каранды эмес өзгөрүлмөлөр катышкан жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, n сандагы кадимки дифференциалдык теңдемелерге келтирилет. Айрым учурларда, көз каранды эмес өзгөрүлмөлөрүн саны азайган бир канча жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерге ажыратылат.

2. *Интегралдык өзгөртүп түзүүлөр усулу.* n сандагы көз каранды эмес өзгөрүлмөлөр катышкан жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, $n - 1$ сандагы көз каранды эмес өзгөрүлмөлүү ЖТДТ ге келтирилет. Эгерде баштапкы ЖТДТ де эки көз каранды эмес өзгөрүлмөлөр болсо, анда интегралдык өзгөртүп түзүүдөн кийин кадимки дифференциалдык теңдемеге айланат, б.а. бир гана көз каранды эмес өзгөрүлмө катышкан теңдеме болот.

3. *Координаталарды өзгөртүп түзүү усулу.* Координаталар системасын буруу жана параллель которуу менен ЖТДТ, баштапкы көрүнүштөн жөнөкөйлөгөн абалга келтирилет же болбосо КДТ келип чыгат.

4. *Көз каранды өзгөрүлмөнү өзгөртүп түзүү усулу.* Теңдемедеги белгисиз функцияга киргизилген өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен, жаңы белгисиз функция катышкан, чыгарууга ыңгайлуу башка бир ЖТДТ түзүлөт.

5. *Сандык усулдар*. Айырмалар схемасы боюнча жекече туундулар сандык туюнтмаларга келтирилип, ЖТДТ лар ЭВМ де итерация усулу менен эсептөөгө мүмкүн боло тургандай алгебралык теңдемелер системасына айландырылат. Айрым учурларда айырмалар схемасынан башка сандык эсептөөлөр усулдары да колдонулат.

6. *Козголуулар теориясын усулдары*. Сызыктуу эмес ЖТДТ лер менен берилген маселелер, сызыктуу эмес маселелерди аппроксимация (алмаштыра алуучу) кыла ала тургандай сызыктуу маселелердин удаалаштыгы менен алмаштырылат.

7. *Гриндин функциялар усулу*. Баштапкы теңдемеге коюлган чек аралык жана баштапкы шарттар, жөнөкөйлөтүлгөн элементардык булактардын же шарттардын системасы менен алмаштырылып, коюлган маселе ар бир жөнөкөйлөтүлгөн булак үчүн өз – өзүнчө чечилет. Ал эми баштапкы коюлган тапшырма маселе, ар бир жөнөкөйлөтүлгөн элементардык маселелердин жыйынтык суммасы катарында аныкталат.

8. *Интегралдык теңдемелер усулу*. Берилген ЖТДТ интегралдоонун натыйжасында белгисиз функциялар интеграл алдында калган теңдемеге келтирилип, интегралдык теңдемеге айланат жана интегралдык теңдемени чыгаруу усулдары аркылуу чечилет.

9. *Вариация усулдары*. Берилген ЖТДТ дин ордуна кайсы бир минималдаштырган маселе каралат. Анткени кайсы бир туюнтулуштун минимум абалы, берилген ЖТДТ дин чыгарылышы менен дал келип калган учурлар кездешет.

10. *Өздүк функциялар боюнча ажыратуу усулу*. Берилген ЖТДТ дин чечими өздүк функциялардын катары сыяктуу изилденет. Бул өздүк функциялар, берилген ЖТДТ лерге коюлган маселелерге туура келген өздүк маанилерге карата түзүлгөн маселелерин чыгарылышы катарында табылышат.

Биз бул ыкмалардын айрымдарын гана токтолуп, алардын жардамы менен ЖТДТ лерге коюлган маселелердин чыгарылыштарын табабыз. Калган ыкмалдарды колдонуу ыктыярын окурмандарга калтырып, өздөрүнүн максаттарына жараша пайдаланат деп үмүттөнөбүз.

Коюлган маселенин коррективдүүлүгү

Жекече туундулуу теңдемеге коюлган маселе жаратылышта реалдуу жашаган же жүрүп турган, кайсы бир жалгыз гана кубулушту сүрөттөгөндүктөн, маселенин чечими коррективдүү болушу керек. Ошондуктан биз караган бардык ЖТДТ ларга коюлуучу маселелерди (атайын эскертүү берилбесе) коррективдүү деп эсептейбиз.

20.1 Аныктама. *Эгерде коюлган маселенин чечими:*

1) *Функциялардын кайсы бир V_1 – мейкиндигинде жашаса,*

2) *Кайсы бир V_2 – мейкиндигинде жалгыз гана болсо,*

3) *Табылган чыгарылыш коюлган маселеде берилген баштапкы, чек ара шарттары, коэффициенттер ж.б.у.с. белгилүү чоңдуктар менен үзгүлтүксүздүк байланышта болсо, б.а. бирөөсүнүн чексиз кичине өзгөрүүсүнө экинчиси да тиешелүү чексиз кичине өзгөрүү менен жооп берсе.*

Анда $V_1 \cap V_2$ – мейкиндиктерин кесилиши – коюлган математикалык маселенин коррективдүүлүк көптүгү, ал эми маселенин өзү ушул кесилиш көптүгүндө коррективдүү коюлган деп эсептелет.

§ 20.2 Бир өлчөмдүү параболалык теңдемелер

20.2.1 Сырттан таасир болбогон учурда жылуулук өткөрүмдүүлүктүн сызыктуу теңдемесин түзүү

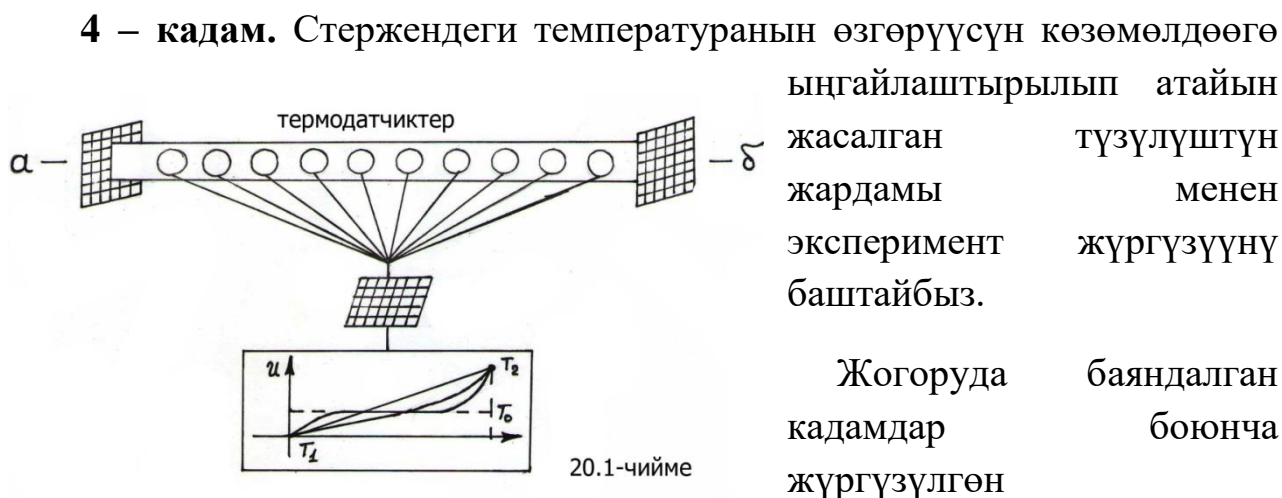
Параболалык теңдемелердин тилинде жылуулук өткөрүмдүүлүк процесстерин математикалык жактан моделдештирүүгө болорун, жөнөкөй бир физикалык маселеге карата жасалган тажрыйба аркылуу көрсөтөлү. Ал үчүн тажрыйбаны төмөндөгү кадамдарга бөлүп жүргүзөлү:

1 – кадам. Узундугу $L = 2$ м., диаметри 2 см. болгон жез стержень алабыз. Эгерде стержень табылбаса, анда ички жана сырткы беттери жылуулук өткөрбөй тургандай капталган жез зымын алууга да болот, б.а. жез стержендин капталдары боюнча жылуулук алмашуу жүрбөстөн

анын ички бөлүкчөлөрү аркылуу жылуулук тарагандай шартта тандалган узун зым сымал жез алынат.

2 – кадам. Ичинде турактуу T_0 C (айталы T_0 C = 10^0 C) температура сакталган идиш алынып, белгилүү бир убакытка стержень идишке салынып жаап коюлат. Бул убакыттын ичинде стержендин температурасы да идиштин ичиндеги температурага теңдешип, T_0 C = 10^0 C болуп калышы керек.

3 – кадам. Болжолдонгон убакыт өткөндөн кийин стерженди идиштен чыгарып, дароо анын эки учуна термоэлементтерди туташтырабыз. Ыңгайлуулук үчүн туташтыруу убактысын $t = 0$ деп белгилейли. Туташтырылган термоэлементтер стержендин бир учунда T_1 , экинчи учунда T_2 градус температураларды турактуу сактап турсун (айталы $T_1 = 0^0$ C, $T_2 = 50^0$ C), б.а. учтары ысып кетсе муздатып, сууп кетсе жылытып берилген температураларды сактаган термоэлементтер болушсун (20.1 – чийме).



эксперименттин негизинде:

1. Жылуулук өткөрүмдүүлүк кубулушун сүрөттөгөн жекече туундулуу дифференциалдык теңдемени түзүү;
2. Чек ара чекиттеринде жылуулук алмашуу абалын мүнөздөгөн чек аралык шарттарын аныктоо;
3. Процесстин башталуу абалын мүнөздөгөн баштапкы шартты аныктоо,

сыяктуу үч маселени байланыштырган тиешелештикти орнотобуз.

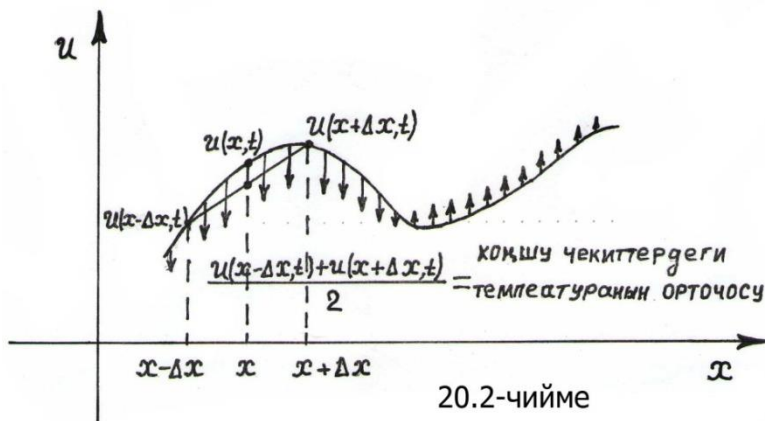
Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси

Бир өлчөмдүү (сызыктуу) жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси жалпы учурда

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty \quad (3)$$

көрүнүштө жазылат. Мында t – убакыт, L – стержендин узундугу, ал эми $u(x, t)$ – деп t убактысында x чекитиндеги градус менен өлчөнгөн температура белгиленген. Ал эми u_t – убакыттын өтүшүнө жараша температуранын өзгөрүү ылдамдыгы, u_{xx} – коңшулаш чекиттердеги температуралардын айырмачылыгын өлчөмүн сүрөттөөчү сызыктын (температуранын профилин) же $u(x, t)$ функциясын графигин иймектик багыттары.

Эгерде (3) теңдемесинде $u_t > 0$ болсо, анда убакыттын t ирмеминде



стержендин кайсы бир x чекитинде температура жогорулап, ал эми

$u_t < 0$ болгондо төмөндөп бара жаткан болот. Ошондой эле, стержендин ар бир чекиттеринде температуранын өзгөрүүсүн u_{xx} тин

белгисине карап, 20.2 – чиймеде көрсөтүлгөн температуранын профилин иймектик багыттары боюнча аныктайбыз. Ал үчүн чектүү айырмалар схемасын колдонуп u_{xx} ке жылуулук өткөрүмдүүлүктүн тилинде түшүндүрмө беребиз. $u(x, t)$ функциясын x боюнча жекече туундусун эсептөө эрежесинен

$$u_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \cong \frac{1}{\Delta x} [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]$$

жакындаштырылган туюнтулуусуна ээ болобуз. Ушул эрежени экинчи тартиптеги жекече туундуга жайылтып,

$$\begin{aligned}
u_{xx} &\cong \frac{1}{\Delta x^2} \{ [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - [u(x, t) - u(x - \Delta x, t)] \} = \\
&= \frac{1}{\Delta x^2} \{ u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) \} = \\
&= \frac{2}{\Delta x^2} \left\{ \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - u(x, t) \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

ээ болобуз. (4) туюнтулуусунан u_{xx} ке карата төмөндөгүдөй баа берүүгө болорун көрөбүз:

1. Эгерде стержендин x чекитиндеги температура, анын эки тарабындагы коңшулаш чекиттердеги температуралардын орточо маанисинен төмөн болсо (бул учурда x огу деп алынган стерженди бойлогон жылуулуктун толук агымы оң), анда $u_{xx} > 0$ болот.

2. Эгерде стержендин x чекитиндеги температура, анын эки тарабындагы коңшулаш чекиттердеги температуралардын орточо маанисине тең болсо (бул учурда x огу деп алынган стерженди бойлогон жылуулуктун толук агымы нөлгө тең), анда $u_{xx} = 0$ болот.

3. Эгерде стержендин x чекитиндеги температура, анын эки тарабындагы коңшулаш чекиттердеги температуралардын орточо маанисинен жогору болсо (бул учурда x огу деп алынган стерженди бойлогон жылуулуктун толук агымы терс), анда $u_{xx} < 0$ нөлдөн кичине болот.

2 – чиймеде көрсөтүлгөндөй убакыттын t ирмеминде стержендин x чекитиндеги $u(x, t)$ – температура, ага эки жагынан коңшулаш жайгашкан $x + \Delta x$ жана $x - \Delta x$ чекиттериндеги $u(x + \Delta x, t)$,

$u(x - \Delta x, t)$ температураларын орточо маанисинен чоң болсун дейли.

Бул учурда x чекитиндеги температура t убактысын өтүшүнө жараша u_t ылдамдыгы менен өсүп бара жаткан болот. Экинчи жактан бул ылдамдык x чекитиндеги температуранын өзгөрүү профилин көрсөткөн (4) туюнтулуштагы кашаанын ичиндеги

$$\frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} - \underbrace{u(x, t)}_{\substack{x \text{ чекитиндеги} \\ \text{температура}}}$$

айырманын чоңдугуна же u_{xx} ке карата мүнөздөлөт. Ошентип u_t менен u_{xx} өз ара пропорционалдуу чоңдуктар болушат. Стержендин материалына жараша аныкталган пропорционалдык коэффициентин α^2 десек, анда сөз кылынган пропорционалдык байланышты

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме (ЖТДТ) көрүнүштө жаза алабыз.

Чек ара шарттары (ЧШ)

Бардык физикалык кубулуштар кайсы бир жерден башталып экинчи бир жерде бүтөт, б.а. чек аралар менен чектелген аймакта гана болуп өтөт. Ошондуктан физикалык маселенин кийинки тагдырын жетерлик баяндап түшүндүрүү үчүн, анын математикалык моделине чек араларды кошууга туура келет. Биз караган тажрыйбада, чек аралык шарттар (ЧШ) стержендин башталуу $x = 0$ жана акыркы $x = L$ чекиттериндеги температураларга жараша

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = T_1, \\ u(L, t) = T_2, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty \quad (5)$$

көрүнүштө коюлат.

Баштапкы же Кошинин шарты (БШ)

Кандай гана физикалык кубулуш болбосун убакыттын кайсы бир ирмеминде башталат (адатта бул ирмемди $t_0 = 0$ деп алышат). Ошондуктан бул башталуу убактысына физикалык шарт коёбуз. Стержендин температурасы турактуу T_0 болгон учурдан баштап байкоого алынгандыктан, баштапкы шартты

$$(БШ) \quad u(x, t_0) = T_0 \text{ же } u(x, 0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (6)$$

көрүнүштө жаза алабыз. (3) теңдемесине коюлган (6) чы (БШ) ны Кошинин маселеси деп аташат, бирок коюлган маселенин физикалык мүнөзүнө жараша, аны (БШ) деп атай беребиз.

Ошентип, жылуулук өткөрүмдүүлүк процессин математикалык моделин (3), (5), (6) тиешелештиктерин төмөндөгүдөй аралаш маселелердин системасы катарында кароого болот

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & 0 < t < \infty, & \text{(ЖТДТ)} \\ u(0, t) = T_1, & & 0 < t < +\infty, & \text{(ЧШ)} \\ u(L, t) = T_2, & & & \\ u(x, 0) = T_0, & & 0 \leq x \leq L. & \text{(БШ)} \end{cases} \quad (7)$$

Бирок маселенин түйүнү, ушул (7) шарттарга баш ийген жалгыз гана $u(x, t)$ функциясын табыларын жана табылган функция чын эле стержендеги температураны чагылдыра аларын көрсөтүү менен чечилет. Азырынча, жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин айрым бир модификацияланган түрлөрү менен таанышып көрөлү.

Диффузиялык типтеги айрым теңдемелер

Стержендин каптал беттеринде да жылуулук алмашуу процесси жүрсүн дейли. Анда убакыттын t моментинде x чекитине туура келген каптал бет боюнча жылуулук алмашуу агымы, стержень менен чөйрөнүн температураларын $u_{к.б.} = \beta(u - u_ч)$ айырмаларына пропорционалдуу болот. Ошондуктан жылуулук өткөрүмдүүлүктүн стержень бойлогон $\alpha^2 u_{xx}$ – таралуу агымын (диффузиясын) гана эмес, стержендин каптал беттери боюнча да агымын эске алган теңдемесин же математикалык моделин

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta(u - u_ч)$$

көрүнүштө жазууга болот. Мында β – пропорция коэффициенти

болгон турактуу сан, $u_ч$ – чөйрөнүн температурасы, $u_{к.б.}$ – каптал бет боюнча жылуулук агымы. $\beta > 0$ болгондо жылуулук стерженден сыртка агып чыкса, $\beta < 0$ болгондо жылуулук агымы сырттан стерженге кирген болот. Эгерде β – коэффициенти α^2 – коэффициентине караганда чоң болсо, анда стержень бойлоп тараган ички жылуулук агымы, каптал бет боюнча өткөн жылуулук агымына

салыштырмалуу кичине же аз болуп, стержендин каптал бети боюнча жылуулук агымы $u_t = -\beta(u - u_c)$ закону боюнча жүрөт.

Жылуулуктун ички булагы

Стержендин ичинде, убакыттын бардык t моменттеринде бүтүндөй стерженди бойлоп жылуулуктун $f(x, t)$ булагы жайгашкан учур,

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$$

бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемеси менен моделдештирилет. Мисалы, стержень бойлоп электр тогуна туташтырылган зым өткөн учурда, зымдын каршылыгын $f(x, t) = R$ – жылуулуктун турактуу булагы катарында эсептеп

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + R,$$

көрүнүштөгү дифференциалдык теңдемени алууга болот.

Конвективдүү диффузиянын теңдемеси

Айталы, кандайдыр бир диффузиялык таралуудагы жылуулук (же жыт) сызыктуу v ылдамдыгы менен бара жаткан агымды бойлой тарасын. Бул учурда, убакыттын t ирмеминде октун x чекитиндеги жыттын концентрациясын $u(x, t)$ функциясы катарында кароого болот. Концентрациянын u_t – таралуу ылдамдыгын, конвективдүү диффузиянын

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$$

теңдемеси менен туюнтууга болот. Мында $\alpha^2 u_{xx}$ – диффузиялык аракеттин таасири, ал эми $v u_x$ – конвективдин компонентасы болуп эсептелишет. Диффузиябы же конвекциябы кайсынысы болсо да, α^2 менен v чоңдуктарын катышынан көз каранды болорун белгилеп кетүүгө болот. Мисалы морудан көтөрүлүп бара жаткан түтүндүн концентрациясы, адегенде мештен чыккан жылуулук агымдын эсебинен конвективдүү түрдө морудан чыгып, ошол эле мезгилде абанын вихрдик кыймылдарын таасири астында чөйрөгө диффундаштырылат (аралаша сиңип тарап кетет).

Жылуулулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин мындай модификацияланган түрлөрү сүрөттөгөн физикалык кубулуштардын өзгөчөлүктөрүнө жараша, стержендин учтарына коюлган чек аралык шарттар да өзгөрүшөт.

Эскертүү. Төрт өлчөмдүү мейкиндикте каралган $u(x, y, z, t)$ функциясы үчүн жылуулулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси

$$u_t = \alpha^2 \Delta u + f(x, y, z, t)$$

көрүнүштө жазылат. Мында

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Лапласианы, $f(x, y, z, t)$ – белгилүү төрт өзгөрүлмөлүү функция.

2. Көнүгүүлөр

1. Эгерде стерженге баштапкы температура

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

ал эми чек ара шарттары

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = 0$$

көрүнүштө коюлса, анда $t > 0$ болгондо стержендеги $u(x, t)$ – температурасын кандайча мүнөздөөгө болот.

2. Айталы, стерженде ички турактуу жылуулулук булагы орнотулуп, стержендеги жылуулулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1$$

көрүнүштө берилип, чек арадагы температуралар $u(0, t) = 0$ жана $u(1, t) = 0$ маанилерине ээ болушсун. Бул учурда стержендеги турактуу сакталган (стационардык) температура кандай болот? Тактап айтканда $u(x, t)$ температурасы, t убактысынан көз каранды болбогон $U(x)$ температурасын кандайча бөлүштүрүлүшүнө карай жакындап умтулат?

3. Металл стержень каптал бети аркылуу

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < 1$$

теңдемеси менен мүнөздөлгөн жылуулукту жоготуп турсун дейли.

Ошондой эле, стержендин учтарында $u(0, t) = 1$ жана $u(1, t) = 1$ температураларын сактап турууга мүмкүн болсун. Ушундай шарттарда стержень боюнча температуранын стационардык бөлүштүрүлүүсүн тапкыла жана бөлүштүрүүнүн графигин тургузгула. Кайсы чекиттерде жылуулук агымы бар экендигин көрсөткүлө.

4. Айталы, узундугу L болгон металл стержендин баштапкы температурасы $\sin(3\pi x)$, ал эми сол учунда 0°C , оң учунда 10°C температуралар сакталары белгилүү болсун. Бул учурда жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлуучу аралаш маселени кандайча түзүүгө болот.

20.2.2 Диффузиялык типтеги маселерге коюлуучу чек ара шарттары

Негизинен диффузиялык теңдемелерге коюлуучу чек ара шарттары үч түргө бөлүнүшөт:

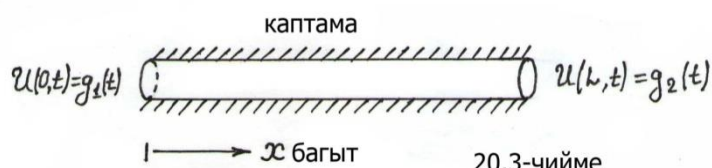
1. Чек арада температура берилгенде $u = g(t)$ түрүндө;
2. Курчап турган чөйрөнүн температурасы берилгенде

$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ түрүндө. Мында \vec{n} – стержендин чек арасына сырттан түшүрүлгөн нормаль – вектор, ыңгайлуулук үчүн аны n деп жазабыз;

3. Чек арадан өтүүчү жылуулук агымы берилгенде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(t) \text{ түрүндө.}$$

Бул ар түрдүү чек ара шарттарынын кандай физикалык абалдардан келип чыгарын көрсөтөлү.



Биринчи түрдөгү чек ара шарттары

Учтарындагы жылуулуктар $g_1(t)$ жана

$g_2(t)$ мыйзамдары менен өзгөрүп узундугу L , каптал беттери капталуу

(изоляция) болгон бир өлчөмдүү (сызыктуу) стержень боюнча өткөн жылуулук агымын карайлы (20.3 – чийме).

Стержендин учтарына жылуулук булактары менен кошо термостат орнотуу менен, турактуу температура режимин кармап турган учурдан айырмаланып, убакыттын ар бир ирмеминде стержендин учтарында температура өзөрүп турган (практикада көп кездешүүчү) маселелерди да кароого болот. Стержендин учтарындагы өзгөрүлмө $g_1(t)$, $g_2(t)$ температуралары стержендеги жылуулук агымына таасирин тийгизип, аны өзгөрүп турууга мажбурлайт. Ошондуктан, кээде чек арадагы бул $g_1(t)$, $g_2(t)$ температуралык режимдерди тандап жөнгө салуу менен стержендин

ичиндеги температураны өзүбүз каалагандай нукка салууга болот. Мисалы, металлургияда чек ара шарттарын тандап башкаруу менен, убакыттын



жүрүшүндө мештин ичиндеги металлдын температурасын анча чоң эмес болушуна жетишүү практикасы колдонулуп келет. Албетте, биринчи түрдөгү чек ара шарты менен берилген маселелерди чечүүдө баштапкы шартты эске алуу зарылчылыгы келип чыгат. Бирок, убакыт өтө кыска аралыкка созулганда баштапкы шарт таасирин жоготуп, стержендин ички жыйынтык температурасы чек арадагы температуралар менен аныкталып калат.

Экинчи түрдөгү чек ара шарттары

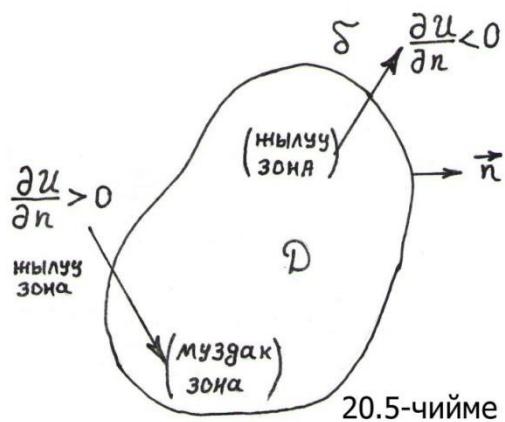
Айталы, берилген жез стержендин каптал беттери жылуулук өткөрбөгөндөй капталып, учтары гана ачык калтырылсын. Ал эми стержендин учтарында эч кандай температуралык режимдер берилбестен, эки учу тең 20.4 – чиймеде көрсөтүлгөндөй эки башка суюк чөйрөлөргө туташтырылып коюлсун. Айталы, чиймеде көрсөтүлгөн "а" – идиштеги суюк чөйрө $g_1(t)$, "б" – идиштеги суюк чөйрө $g_2(t)$ мыйзамдары боюнча өзгөрүп турушсун. Бирок стержендин учку чек араларында температуралар дароо эле суюк чөйрөлөрдүн температураларына окшош болот деп эсептөөгө болбойт. Ошондой болсо да Ньютондун мыйзамы боюнча стержендин бир учундагы температура суюк чөйрөнүн температурасынан төмөн болсо, анда

жылуулук чөйрөдөн стерженге карай температуралардын айырмачылыгына пропорционалдуу ылдамдык менен агып жөнөйт. Атап айтканда чек аралары $x = 0$ жана $x = L$ болгон стержендеги Ньютондук жылуулук алмашуу мыйзамын

$$\begin{cases} x = 0 \text{ учундагы жылуулук агым } h[u(0, t) - g_1(t)] \text{ чоңдугуна,} \\ x = L \text{ учундагы жылуулук агым } h[u(L, t) - g_2(t)] \text{ чоңдугуна} \end{cases} \quad (8)$$

барабар деген пикирде жазууга болот. Мында h – жылуулук алмашуу коэффициенти деп аталып, температуралардын айырмачылыгы бир градус болгон учурда, бир секунда ичинде чек арадан агып өткөн жылуулук калориясын санын көрсөтөт. Сыртка чыгуучу агым стержендин учтары аркылуу бир секунда ичинде өткөн калориялардын саныны барабар болуп, стержендин кайсы учундагы температура өзү туташтырылган чөйрөнүн температурасынан чоң болсо, ошол учунан чыккан агым оң деп эсептелет.

(8) теңдемеси менен кошо Фурьенин жылуулук өткөрүмдүүлүк мыйзамын чогуу карап, чек ара шарттарын коюуга пайдаланабыз.



Анткени (8) теңдемеси чыгуучу агымга биринчи сүрөттөлүштү берсе, кийинки экинчи сүрөттөлүштү Фурьенин мыйзамы берип толуктайт. Фурьенин закону боюнча $\frac{du}{dn} > 0$ болгондо жылуулук чөйрөгө агып кирет, ал эми $\frac{du}{dn} < 0$ болгондо чөйрөдөн стерженге агып чыгат (20.5 – чийме). Мында n –

стержендин чек арасына түшүрүлгөн сырткы нормаль, $\frac{du}{dn}$ – нормалдын багыты боюнча температуранын өзгөрүүсү (ылдамдыгы). Эксперименталдык тажрыйбадан келип чыккан Фурьенин мыйзамын төмөндөгү көрүнүштө түшүнүүгө болот:

Областтын чек арасынан чыгуучу жылуулук агымы, чек арага түшүрүлгөн ички нормалдын багыты боюнча температурадан алынган туундуга пропорционалдуу

(9)

Бул мыйзам, эгерде жылуулук агымы D областын чек арасына түшүрүлгөн сырткы нормалдын багыты боюнча ыкчам өссө, анда агым

курчап турган чөйрөдөн D областына агып кирип баштарын ырастайт (20.5 – чийме).

Жыйынтыктап айтканда диффузиялык типтеги бир өлчөмдүү маселеге карата Фурьенин мыйзамын

$$\begin{cases} x = 0 \text{ болгондо чыгуучу агым } k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ке барабар,} \\ x = L \text{ болгондо чыгуучу агым } -k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ке барабар,} \end{cases} \quad (10)$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мында k – материалдын жылуулукту канчалык өткөрүү ченин көрсөтүүчү жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенти. Мисалы, жылуулукту начар өткөргөн материалда k нөлгө жакындаса, жылуулукту жакшы өткөргөн алюминий менен жезде k бирге жакын маанилергэ ээ болот. Ошентип, Фурьенин (10)



мыйзамы стержендин чек арасындагы гана жылуулук өткөрүмдүүлүгүн мүнөздөбөстөн, бүтүндөй стержендин жана анын ички чекиттериндеги жылуулук өткөрүмдүүлүк процесстерин үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк берет.

Мындай мүмкүнчүлүктү 20.6 – чиймеден байкоого болот.

Ички чекиттер үчүн Фурьенин мыйзамын

$$\boxed{x \text{ чекитинен оңдон солго карай өтүүчү агым } -k \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ке барабар}} \quad (11)$$

көрүнүштө жазууга болот. Бул мыйзамга ылайык, эгерде x_0 чекитинде $u_x < 0$ болсо, анда жылуулук бул чекитте солдон оңго карай, ал эми $u_x > 0$ болсо оңдон солго карай агат (Жылуулук муздак чөйрөдөн жылуу чөйрөгө карай агат.).

Демек, жылуулук өткөрүмдүүлүк үчүн (8) жана (10) туюнтууларын колдонуп, 20.3 – чиймеде көрсөтүлгөн маселеге коюлган чек ара шарттарын математикалык тилде

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{h}{k} [u(0,t) - g_1(t)], \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = -\frac{h}{k} [u(L,t) - g_2(t)] \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЧШ})$$

көрүнүштө жазса болот.

Көбүнчө h , k турактууларын бир эле λ менен белгилеп, жылуулук агымына чек ара шарттарын

$$\begin{cases} u_x(0, t) = \lambda[u(0, t) - g_1(t)], \\ u_x(L, t) = \lambda[u(L, t) - g_2(t)] \end{cases} \quad (12)$$

көрүнүштө коюшат.

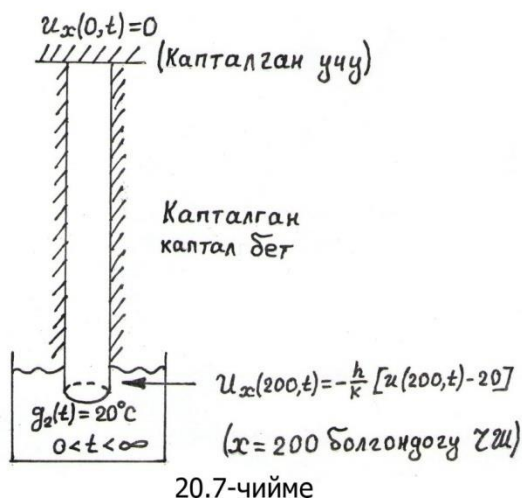
Үчүнчү түрдөгү чек ара шарттары

Жылуулук өткөрбөй тургандай капталган чек аралар аркылуу жылуулук агымы өтө албагандыктан, капталган чек ара чекиттеринде жүргүзүлгөн сырткы жана ички нормалдардын багыты боюнча температурадан алынган туундулар нөлгө тең болушат, анткени чек ара аркылуу өтүүчү жылуулук агымдары нормалдардын багыты боюнча алынган туундуларга пропорционалдуу болору белгилүү. Бир өлчөмдүү стержендин учку чекиттери жылуулук өткөрбөй тургандай капталган

учурда, чек ара шарттары

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

көрүнүштө коюлат.



Мисал катарында бир өлчөмдүү жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлуучу маселени көрсөтөлү: Айталы, каптал бети жылуулук өткөрбөй тургандай

капталган узундугу 200 см. болгон жез стержень берилсин. Жез стержендин башталыш учу $x = 0$ да жылуулук өткөрбөгөндөй капталып, убакыттын $t = 0$ башталышында турактуу 0°C температурада болсун, ал эми бүтүүчү $x = 200$ учун температурасы $g_2(t) = 20^\circ\text{C}$ болгон суунун агымы тынымсыз жууп турсун деп эсептейли (20.7 – чийме). Мындай коюлган аралаш маселенин математикалык моделин төмөндөгүдөй төрт туюнтуулар аркылуу мүнөздөөгө болот:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 200, \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(200, t) = -\frac{h}{k}[u(200, t) - 20], \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЧШ}) \quad (13)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (\text{БШ})$$

Мында $\alpha^2 = 1,16 \text{ см}^2/\text{с}$ – жездин температура өткөрүмдүүлүгү, $k = 0,93 \text{ кал./см} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{С}$ – жездин жылуулук өткөрүмдүүлүгү, h – жылуулук алмашуу коэффициенти болушат. h – коэффициенти, стержендин бүтүүчү учунан сууга өтүп жаткан жылуулук агымын ылдамдыгын ченөө менен эсептелгендиктен, бир топ машакаттуу жол менен аныкталат. Анткени, бул коэффициент стержендин учун жууп аккан суунун агымын абалына, ылдамгына карата функция болуп эсептелип, эксперименттер аркылуу табылат.

3. Көнүгүүлөр

1. Коюлган (13) аралаш маселенин чыгарылышын графигин сызгыла. Өзүңөрдүн интуицияңарга негиздеп, төмөндөгү суроолорго жооп бергиле: Силер тургузган график коюлган чек ара шарттарын канааттандырабы? Сержендин стационардык температурасы кандай болот?

$$2. u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 1, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

аралаш маселесин кантип интегралдоого болот. Убакыттын ар кандай ирмемдерине карата бул маселенин чыгарылышын графигин тургузууга болобу? Бул чыгарылыштын стационардык чечимге умтулары чынбы?

$$3. u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

маселесине кандай физикалык интерпретация берүүгө болот. Бул маселенин чыгарылышын убакыттын ар кандай ирмемдерине карата

графикте көрсөтүүгө болобу? Стационардык температура жөнүндө эмнелерди айтууга болот?

4. Айталы металл стержендин каптал бети ачык болуп, баштапкы температурасы 20°C болгону менен, көз ирмем ичинде анын кайсы бир учундагы температура 50°C жетсин. Андан кийин стержень температурасы 50°C болгон суюктук менен жуулсун дейли. Мындай кырдаалга тиешелеш коюлган аралаш маселе кандай көрүнүштө болот.

20.2.3 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин келтирип чыгаруу

Жылуулуктун санын сакталуу мыйзамына гана таянып, жылуулук өткөрүмдүүлүктүн бир өлчөмдүү

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t),$$

көрүнүштөгү теңдемесин кантип келтирип чыгарууга болорун көрсөтөлү. Ал үчүн жылуулук алмашуунун ылдамдыгын: *жылуулук өткөрүүчүлүк*, *жылуулук сыйымдуулугу* жана материалдын *тыгыздыгы* сыяктуу жылуулуктун негизги физикалык параметрлеринен көз карандылык байланыштарын карайбыз.

Кандай гана илимдин тармагы болбосун, анын ичинде чын экендиги калетсиз болгон *негизги фундаменталдык ырастоолордун тобу* болот. Ошол чын экендиги калетсиз болгон *фундаменталдык ырастоолордун тобуна* таянып, тармак боюнча кийинки калган билгилерди келтирип чыгарып жүрөбүз. Мисалы, жылуулук өткөрүмдүүлүк теориясында негизги фундаменталдык ырастоо катарында энергиянын сакталуу мыйзамы эсептелип, калган ырастоолор ушул мыйзамдан келтирилип чыгарылат:

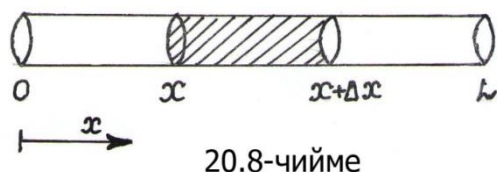
Энергиянын сакталуу мыйзамы (ырастоо)	$\rightarrow u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t)$	\rightarrow	жылуулук өткөрүмдүүлүктүн башка касиеттери.
---------------------------------------	---	---------------	---

Мисалдагы эрежеге таянып жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин келтирип чыгаралы. Ал үчүн узундугу L болгон бир тектүү сержень алып, аны төмөндөгүдөй шарттарга ылайыкташтырып жайгашкан дейли:

1. Стержень өткөргүч аралашмасыз бир өңчөй металлдан бир тектүү (бардык чекиттерде тыгыздыгы бирдей) абалда жасалсын.

2. Стержендин каптал беттери жылуулук өткөрбөгөндөй капталып, жылуулук x огун бойлоп гана тарай алсын.

3. Стержень өтө ничке болуп, анын ар бир x чекитиндеги туурасынан кесилиштин бардык чекиттеринде температура турактуу деп эсептелсин (20.8 – чийме).



Эгерде жылуулуктун санын сакталуу мыйзамын стержендин $[x, x + \Delta x]$ кесиндисине туура келген бөлүгүнө колдонсок, анда аталган мыйзамды

$$\begin{aligned}
 [x, x + \Delta x] \text{ кесиндисиндеги жылуулуктун жалпы өзгөрүшү} &= \\
 &= \text{Чек аралар аркылуу өткөн жылуулуктун толук саны} + \quad (14) \\
 &+ [x, x + \Delta x] \text{ кесиндисин ичинде пайда болгон} \\
 &\text{жылуулуктун толук саны}
 \end{aligned}$$

көрүнүштө жазууга болот.

Убакыттын кайсы бир t ирмеинде болбосун, $[x, x + \Delta x]$ кесиндисин ичиндеги жылуулуктун жалпы саны (калория менен)

$$[x, x + \Delta x] |_{\text{жылуул. жалпы саны}} = \int_x^{x+\Delta x} c \cdot \rho \cdot A \cdot u(s, t) ds$$

формуласы менен эсептелгендиктен, (14) жылуулуктун санын сакталуу мыйзамы математикалык тилде:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c \cdot \rho \cdot A \cdot u(s, t) ds &\equiv c \rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds = \\
 &= k A [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds \quad (15)
 \end{aligned}$$

көрүнүштө жазылат. Мында c – материалдын жылуулукту топтоп сактап калуу жөндөмдүүлүгүн көрсөтүүчү салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугу, ρ – материалдын тыгыздыгы, A – стержендин

туурасынан кесилишин аянты, k – материалдын жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенти, $f(s, t)$ – сырттан таасир берүүчү жылуулук булагын жалпы кубаттуулугу (калория/см · с).

Кийинки максат, (15) туюнтууну интегралы жок жазуу үчүн, анык интегралдын орточо мааниси жөнүндөгү теореманы пайдаланабыз. Теорема боюнча $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда кесиндиден кандайдыр бир ξ чекити табылып ($\xi \in [a, b]$),

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)[b - a]$$

теңдештиги орун алары белгилүү. Бул теңдештикти (15) теңдемеге колдонсок,

$$c\rho A u_t(\xi, t)\Delta x = k A [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + A f(\xi, t)\Delta x,$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

теңдештигине ээ болобуз. Акыркы теңдештикти

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right] + F(x, t)$$

көрүнүшкө келтирип, $\Delta x \rightarrow 0$ умтулгандагы пределге өтсөк

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t), \quad (16)$$

талап кылынган жылуулук өткөрүмдүүлүктүн теңдемеси келип чыгат. Мында $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$ – температура өткөрүмдүүлүк коэффициенти,

$$F(x, t) = \frac{1}{c\rho} f(x, t) - \text{жылуулук булактарын тыгыздыгы.}$$

Кийинки кезекте, стержендин каптал беттери капталбаган учурдагы жылуулук өткөрүмдүүлүктүн теңдемесин келтирип чыгаралы. Айталы, стержендин $(x; t)$ чекитине туура келген каптал бети аркылуу өткөн жылуулуктун агымы, стержендин ошол $(x; t)$ чекитиндеги $u(x; t)$ – температурасы менен чөйрөнүн дайыма 0°C боло тургандай кармалган температурасын айырмасына пропорционалдуу болсун. Бул учурда, жылуулуктун санынын сакталуу мыйзамы

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx} - \beta u + F(x, t) \quad (17)$$

көрүнүштөгү теңдеме менен мүнөздөлөт. Мында β – каптал бет аркылуу өткөн агым үчүн пропорция коэффициентти.

Эскертүү

1. Жогоруда сөз кылынган k – турактуусу *заттын жылуулук өткөрүмдүүлүгү* деп аталып, сандык жактан калыңдыгы 1 см, кесилиш аянты 1см^2 , карама – каршы беттериндеги температуралардын айырмасы 1°C болгон пластинка аркылуу 1 секунда ичинде агып өткөн жылуулук санына барабар. Ар түрдүү материалдардын жылуулук өткөрүмдүүлүгүн сандык маанилери физика же химия окуу китептеринде маалымат таблицаларда берилип, $0 \leq k \leq 1$ аралыгында өзгөрүп турат. Мисалы, жездин жылуулук өткөрүмдүүлүгү 1 ге жакын болсо, жылуулукту аз өткөрө турган чопонуку 0 ге жакын. Эгерде стержен бир тектүү материалдан жасалса, анда k – турактуусу x тен көз каранды болбойт. Ал эми айрым бир материалдар үчүн k өзгөрүлмө болуп, u температурасынан көз каранды болот. Бул учурда жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемеси сызыктуу эмес

$$u_t(x, t) = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} [k(u) \cdot u_x]$$

ЖТДТ катарында жазылат. Бирок, көбүнчө k – заттын жылуулук өткөрүмдүүлүгү u температурасынан сезилгис даражада көз каранды болгондуктан, аны унутуп сызыктуу эмес теңдемени карабай койсок да болот.

2. c – заттын салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугу деп аталып, заттын жылуулук энергиясын сактап калуу жөндөмдүүлүгүн мүнөздөйт. Мисалы, чокко көмүп бышырылган картошка масса бирдигине карата жогорку жылуулук сыйымдуулугуна ээ болгондуктан, көпкө чейин ысык бойдон кала берет. Сандык жактан салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугу, салмагы 1 гр болгон заттын температурасын 1°C га көтөрүүгө кеткен керек болгон жылуулуктун калориясын санына барабар. Биз караган көпчүлүк маселелерде c – ны x тен жана u дан көз каранды болбогон турактуу сан катары эсептейбиз, ал эми айрым бир конкреттүү материалдардын жылуулук сыйымдуулуктарын физика боюнча окуу китептериндеги маалыматтардан алууга болот.

3. Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине катышкан негизги чоңдуктардын СГС системасындагы ченемдери төмөндөгүдөй өлчөнөт:

u – температурасы Целсия градустары менен;

u_t – температуранын өзгөрүү ылдамдыгы $^\circ\text{C}/\text{с}$ – менен;

u_x – температура ийрисиин жантаюусу $^\circ\text{C}/\text{с м}$ – менен;

u_{xx} – температура ийрисин томпоктук абалы $^{\circ}\text{C}/\text{см}^2$ – менен;

c – салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугу кал/г · см² менен;

k – жылуулук өткөрүмдүүлүк кал/см · с · $^{\circ}\text{C}$;

ρ – тыгыздык г/см³ менен;

α^2 – температура өткөрүмдүүлүк см²/с.

4. Материалдын температура өткөрүмдүүлүгүн көрсөткөн $\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$ – чоңдугу, материалдын жылуулук өткөрүмдүүлүгүнө түз, ал эми материалдын ρ – тыгыздыгы менен c – салыштырмалуу жылуулук сыйымдуулугуна тескери пропорционалдуу болот.

20.2.4 Диффузиялык теңдемелерди өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен чыгаруу

Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы Фурье тарабынан сунуш кылынгандыктан Фурьенин ыкмасы деп аталып, математикада эбактан бери кеңири колдонулуп келген алгачкы ыкмалардын бири болуп эсептелет. Бул ыкма төмөндөгүдөй коюлган аралаш маселелерди чечүүдө колдонулат:

1. Сызыктуу жана бир тектүү теңдемеге (турактуу коэффициенттүү болушу шарт эмес);

2. Чек ара шарттары

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) = 0,$$

$$\gamma u_x(1, t) + \delta u(1, t) = 0$$

коюлган мезгилде. Мында $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – кандайдыр бир турактуулар. Жогорудагыдай көрүнүштө коюлган чек ара шарттары *бир тектүү сызыктуу* чек ара шарттары деп аталышат.

Оболу жекече учурдагы бир маселеге токтолуп, диффузиялык типтеги

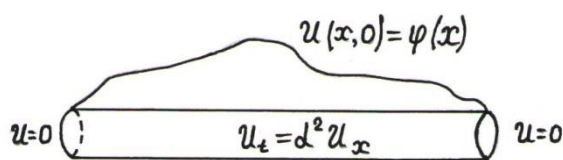
$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \quad (\text{ЖТДТ})$$

теңдемесине коюлган

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty \quad (\text{ЧШ})$$

чек ара шарттарын жана

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$



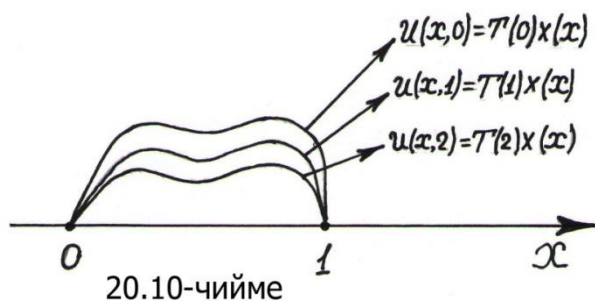
20.9-чийме

баштапкы шартын канааттандырган (аралаш маселенин) чыгарылышын карайлы (20.9 – чийме).

Өзгөрүлмөлөрдү ажыратууга киришүүдөн мурда, коюлган маселеге физикалык итерпретация берели. Ошентип, узундугу 1 ге барабар болгон, учтарында турактуу 0°C температура сакталган стержень берилген. Кошумча катарында $t = 0$ учурдагы башталыш шарты берилип, стержень боюнча убакыттын кийинки моменттеринде $u(x, t)$ – температурасын бөлүштүрүлүүсүн табуу тапшырмасы коюлган.

Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын негизги принциптери

Жөнөкөй жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы деп, чыгарылышты



20.10-чийме

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

көрүнүштө издөөнү түшүнөбүз. Мында $X(x)$ – жалаң гана x өзгөрүлмөсүнөн, ал эми $T(t)$ – жалаң гана t өзгөрүлмөсүнөн көз каранды функциялар болушат. Бул көрүнүштө табылган чыгарылыш, кайсы бир деңгээлде *жөнөкөй* деп эсептелет, анткени убакыттын ар кандай t моменттериндеги $u(x, t)$ – температурасы профилинин “формасын” сактап кала берет (20.10 – чийме).

Жалпылап айтканда чек ара шарттарын канааттандырган чексиз сандагы ушундай $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ жөнөкөй функциялар көрүнүштөрдө жазылган *жөнөкөй чыгарылыштар* табылып, аларды чыгарылыштардын фундаментальдык системасы катарында кабыл алабыз. Ошентип, коюлган маселенин чыгарылышы катарында

чечимдердин $X_n(x)T_n(t)$ фундаментальдык системасын сызыктуу комбинациясы катары аныкталган, баштапкы шартты канааттандыруучу

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)T_n(t)$$

жыйынтыктоочу сумманы алабыз. Бул сумма чыгарылышты элементардык “кыштардан кынап” кураштырып тургузуу процессине окшоп кетет. Чынында эле акыркы сумма баштапкы жана чек ара шарттарын канааттандыргандыктан, аны чыгарылыш катары кабыл алууга болот.

Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу

1 – кадамда ЖТДТ нин элементардык чыгарылыштарын табалы.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty \quad (\text{ЧШ}) \quad (18)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

аралаш маселесинин чыгарылышын $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ көрүнүштө издейли. Болжолдонгон чыгарылышты (ЖТДТ) га койсок,

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha^2 X''(x) \cdot T(t)$$

теңдештиги келип чыгып, анын эки жагын тең $\alpha^2 X(x) \cdot T(t)$ ке бөлүп жиберсек

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

оң жагы t дан, сол жагы x тен гана көз каранды болгон, өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган теңдештигине ээ болобуз. x жана t өзгөрүлмөлөрү бири – бирине байланышпаган өз алдынча маанилерди кабыл алышкандыктан, эки жагы тең кайсы бир k – бөлүүнүн турактуусуна

$$k = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k$$

барабар болгондо гана акыркы теңдештиктин орун алары келип чыгат. Аларды k турактуусуна өз өзүнчө теңдеп, берилген (ЖТДТ) ни жөнөкөйлөгөн эки кадимки дифференциалдык теңдемелерге

$$\begin{aligned} T'(t) - k\alpha^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) - kX(x) &= 0 \end{aligned}$$

келтиребиз. Кадимки дифференциалдык теңдемелерди өз өзүнчө чыгарып, тиешелүү чыгарылыштардын көбөйтүндүсү берилген (ЖТДТ) ны канааттандыраарына ишенүүгө болот. Бирок, тийинди катарында табылган k – турактуусу оң сан болгон учурда, $X(0) = X(1) = 0$ чек ара шарттарын канааттандырган $X''(x) - kX(x) = 0$ теңдемеси тривиалдык гана $X(x) \equiv 0$ чечимине ээ болгондуктан, (ЖТДТ) нын $u(x, t) = 0 \cdot T(t) \equiv 0$ көрүнүштөгү нөлдүк чыгарылышын гана тапкан болобуз. Ошондуктан нөлдүк эмес чыгарылыштарды табуу үчүн, λ нин бардык $\lambda \neq 0$ маанилеринде k – бөлүүнүн турактуусун терс болушуна кепилдик берген $k = -\lambda^2$ ($k < 0$) белгилөөсүн киргизебиз. Бул учурда t убактысын чексиз узарышы ($t \rightarrow \infty$) менен, $T(t)$ – функциясы нөлгө умтулат. Жаңы белгилөөнү эске алуу менен, өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган кадимки дифференциалдык теңдемелерди

$$\begin{aligned} T'(t) + (\lambda\alpha)^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0 \end{aligned}$$

көрүнүшкө келтиребиз. Алардын жалпы чыгарылыштарын табалы:

$$T(t) = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t}, \quad A - \text{каалагандай турактуу сан,}$$

$$X(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x), \quad A, B - \text{каалагандай турактуу сандар.}$$

Демек, $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cdot [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)]$ функциясы $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}$ теңдемесин канааттандырат. Ошентип, берилген теңдемени канааттандырышкан чексиз көп функциялардын тобун түзө алдык.

2 – кадамда коюлган чек ара шарттарын канааттандырган чыгарылыштарды табуу маселесин карайлы. Бизде берилген теңдеменин чексиз көп чыгарылыштарын тобу табылганы менен,

алардын баары эле коюлган башталыш жана чек ара шарттарын канааттандырыша беришпейт. Ошондуктан, бул кадамда

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(1, t) &= 0 \end{aligned}$$

чек ара шарттарын канааттандыруучу

$$e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cdot [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)] \quad (19)$$

чыгарылыштардын тобун бөлүп алабыз. Айталы, (19) чечим чек ара шарттарын канааттандырсын, анда биринчисин

$u(0, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cdot [A \sin 0 + B \cos 0] = B \cdot e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} = 0 \Rightarrow B = 0$ болгондо орун алары келип чыгат, анткени $e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \neq 0$. Экинчисинде $e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \neq 0$ болгондуктан, эркин алынган A турактуусун нөлдөн айырмалуу десек

$$u(1, t) = e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cdot [A \sin \lambda + B \cos \lambda] = A e^{-\lambda^2 \alpha^2 t} \cdot \sin \lambda = 0$$

шарты, $\sin \lambda = 0$ болгондо гана аткарыларын көрөбүз. Мындан $k = -\lambda^2$ бөлүүнүн турактуусуна чектөө коюлары келип чыгат. Анткени λ деп $\sin \lambda = 0$ теңдемесин чечимдерин гана алууга туура келет, б.а. $u(1, t) = 0$ шартын аткарылышы үчүн

$\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ же $\lambda_n = \pm n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$ маанилерин гана кабыл алат деп талап кылуу зарылчылыгы пайда болот.

Албетте, $A = 0$ деп алуу менен экинчи чек ара шартын аткарылуусуна жетишүүгө болмок, бирок бул учурда (19) нөлдүк чыгарылышка (тривиальдык) айланып калар эле.

Ошентип, экинчи кадамды жасоо менен (19) сыяктуу чексиз көп чыгарылыштардын арасынан чек ара шарттарына баш ийген, ар бири

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

(ЖТДТ) ны канааттандырган чексиз көп нөлдүк эмес фундаменталдык функциялардын (чыгарылыштарды) тобун бөлүп алдык. 20.11 – чиймеден бир канча фундаменталдык функциялардын графиктерин көрүүгө болот. Фундаменталдык деп атаганыбыздын себеби, (20) нын ар бирин *жөнөкөй чыгарылыштар* сыяктуу кабыл алып, коюлган маселенин чыгарылышын – алардын суммасы катары кураштырууга болгондугунда. Конкреттүү көрүнүштөгү мындай сумма баштапкы шартка жараша түзүлөт.

3 – акыркы кадамда, фундаменталдык чечимдердин баштапкы шартка да баш ийген

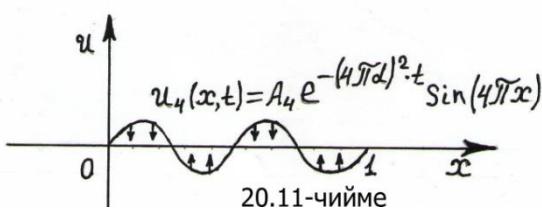
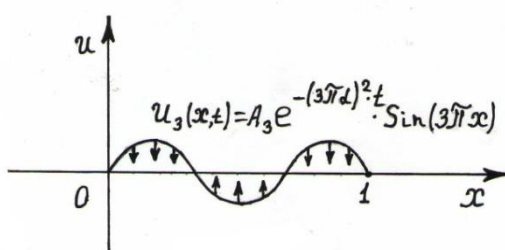
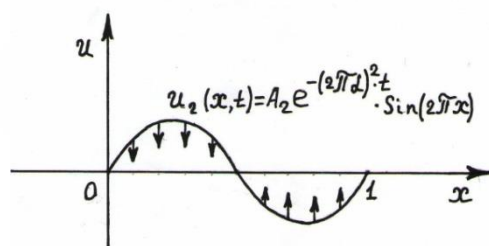
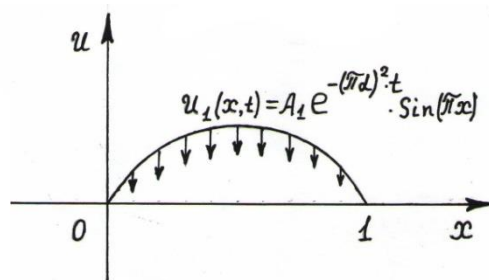
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x)$$

көрүнүштөгү суммасын табуу маселесин карайбыз, б.а. A_n коэффициенттерин тандоо менен $u(x, 0) = \varphi(x)$ шартын аткарылышына жетишебиз. Чынында эле, түзүлгөн суммага баштапкы шартты койсок, A_n коэффициенттерине карата

$$u(x, 0) \equiv \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \quad (21)$$

теңдемеси келип чыгат. (21) теңдемесинен A_n дерди табуу үчүн, анын сол жагындагы $\varphi(x)$ функциясына

$$\varphi(x) = A_1 \sin(\pi x) + A_2 \sin(2\pi x) + A_3 \sin(3\pi x) + \dots \quad (*)$$



20.11-чийме

көрүнүштөгү синустар боюнча катарга ажырасын деген шарт коюуга туура келет. Ал үчүн, $\varphi(x)$ функциясын (§14.7, III – бөлүк) Фурьенин синустар боюнча катарына ажыроо шарттарына ($\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$) баш ийет деп эсептеп, $\sin(n\pi x)$ – функцияларын

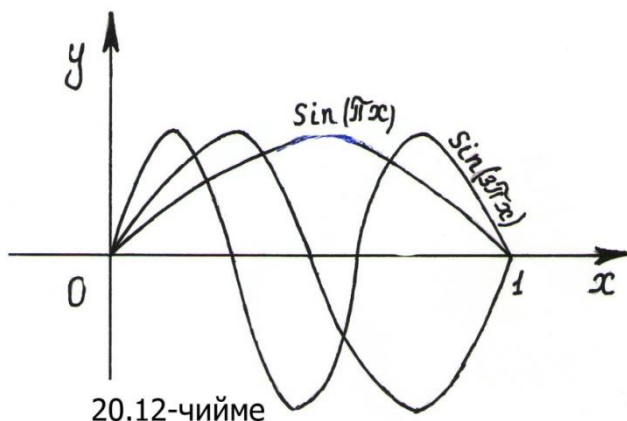
$$\{\sin(n\pi x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

чексиз системасына

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } n \neq m \text{ болсо,} \\ \frac{1}{2}, & \text{эгерде } n = m \text{ болсо} \end{cases}$$

эрежеси аркылуу киргизилген ортогоналдуулук касиетин колдонобуз ($n, m \in N$). Айтылган системага кирген айрым функциялар үчүн, бул касиетти 20.12 – чиймеден көрүүгө болот.

(*) ажыралышынан A_n коэффициенттерин табуу үчүн анын эки



жагын тең $\sin(m\pi x)$ функциясына көбөйтүп, келип чыккан теңдештиктин эки жагын тең 0 дөн 1 ге чейин интегралдайбыз. Анда

ортогоналдуулук касиети боюнча теңдештиктин оң жагында $n = m$ болгон учурдагы нөлдөн айырмалуу бир гана " $\frac{1}{2}$ "

кошулуучусу (интегралдын мааниси) калып, калгандары "0" гө айланышкандыктан,

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(m\pi x) dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx = \frac{A_m}{2} \quad \text{же}$$

$$A_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(n\pi x) dx \quad \text{келип чыгат.}$$

Ошентип, табылган A_n коэффициенттерине карата чек ара жана баштапкы шарттарга баш ийген чыгарылышты

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cdot \sin(n\pi x) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(n\pi x) dx \right] e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cdot \sin(n\pi x) \quad (22)
\end{aligned}$$

көрүнүштө жазууга болот. t убактысы нөлдөн чоң болгондуктан, жетишерлик чоң n номерлери менен белгиленген кошулуучуларда $e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \rightarrow 0$ умтулуп, t убактысын узакка созулган учурдагы процесстерде чыгарылыш катары алгачкы бир же эки кошулуучуларды алуу жетиштүү болот.

1 – мисал. Узундугу π болгон бир тектүү стержендин баштапкы температурасы $u(x, 0) = \sin x$, ал эми учтарында турактуу нөлдүк температура сакталып турсун. Стержень боюнча температуранын бөлүштүрүлүшүн тапкыла.

► Коюлган маселе математикалык тилде

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (\text{БШ})$$

көрүнүштө жазылып, табууну талап кылган температуранын бөлүштүрүлүшү, анын $u(x, t)$ чыгарылышы болуп эсептелет. Фурьенин өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын колдонуп, (ЖТДТ) нин (БШ) жана (ЧШ) шарттарына баш ийген, нөлдүк эмес чыгарылышын табабыз. Өзгөрүлмөлөргө карата ажыратып

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \text{ десек, анда } \begin{cases} T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

кадимки дифференциалдык теңдемелер келип чыгып, чек ара шарттарынан улам келип чыккан

$\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) тандоосунан кийин, алардын $X_n(x) = \sin(nx)$ жана $T_n(t) = A_n e^{-(n\alpha)^2 t}$ жалпы чечимдерин табабыз. Анда чек ара шарттарына баш ийген фундаментальдык чечимдер (20) боюнча

$$u_n(x, t) = A_n e^{-(n\alpha)^2 t} \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

көрүнүштө жазылып, коюлган маселенин чыгарылышы (22) сыяктуу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\alpha)^2 t} \sin(nx),$$

алардын суммасы катарында изделет. Бул чечимди баштапкы шартка баш ийет десек, анда

$$u(x, 0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \quad \text{ээ болуп, коэффициенттин}$$

$$A_n = 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin(nx) dx = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } n = 1 \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } n \neq 1 \text{ болсо} \end{cases}$$

маанисин койгондон кийин, коюлган маселенин

$$u(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin(x) \quad \text{чыгарылышын табабыз.} \blacktriangleleft$$

20.2.5 Бир тектүү эмес теңдемелерди өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен чыгаруу

Бир тектүү эмес диффузиялык теңдемеге коюлган

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

маселени карайлы. Айталы, $f(x, t)$ — функциясы үзгүлтүксүз жана $\frac{\partial f}{\partial x}$ — үзгүлтүксүз жекече туундусуна ээ болуп, бардык $t > 0$ болгон учурларда $f(0, t) = f(1, t) = 0$ шарттарына баш ийсин.

Коюлган маселенин чыгарылышын

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t) \quad (23)$$

көрүнүшүндө издеп, кошумча киригизилген $v(x, t)$ функциясын

$$v_t(x, t) = \alpha^2 v_{xx} + f(x, t), \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v(1, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{ЧШ}) \quad (24)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (\text{БШ})$$

маселесин чыгарылышы, ал эми $\omega(x, t)$ функциясын

$$\omega_t(x, t) = \alpha^2 \omega_{xx}, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} \omega(0, t) = 0, \\ \omega(1, t) = 0, \end{cases} \quad (\text{ЧШ}) \quad (25)$$

$$\omega(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{БШ})$$

маселесин чыгарылышы катарында карайлы.

(25) маселе (18) маселеси сыктуу чечилгендиктен, анын чыгарылышы (22) көрүнүштө табылат

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(n\pi x) dx \right] e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cdot \sin(n\pi x). \quad (22^A)$$

Ал эми (24) маселенин $v(x, t)$ – чыгарылышын $\{\sin(n\pi x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ системасына карата

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

кадимки дифференциалдык теңдемесин коюлган чек аралык шарттарга баш ийген

$$T_n(t) \cdot X_n(x) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cdot \sin(n\pi x) = T_n(t) \cdot \sin(n\pi x)$$

фундаменталдык чыгарылыштардын суммасы

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin(n\pi x) \quad (26)$$

катары сыяктуу издейбиз. Болжонгон (26) чыгарылышты (24) маселедеги (ЖТДТ) га коюп,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cdot \sin(n\pi x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\alpha)^2 \cdot \sin(n\pi x) T_n(t) + f(x, t) \text{ же}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 \cdot T_n(t)] \cdot \sin(n\pi x) = f(x, t) \quad (27)$$

теңдештигине ээ болобуз.

$f(x, t)$ функциясын x өзгөрүлмөсүнө карата синустар боюнча Фурьенин катарына ажыратабыз

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x) . \text{ Мында } f_n(t) = 2 \int_0^1 f(\xi, t) \cdot \sin(n\pi\xi) d\xi.$$

Эки ажыралышты теңдештирип, (27) ни

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 \cdot T_n(t)] \cdot \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\pi x)$$

көрүнүшкө келтиребиз. Мындан кошулуучуларды теңдештиргенде

$$T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 \cdot T_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

теңдемелери келип чыгат.

$\sin(n\pi x)$ функциясы $0 \leq x \leq 1$ аралыгындагы айрым бир x чекиттеринде нөлдөн айырмалуу болгондуктан, (24) маселесинде $v(x, t)$ га коюлган

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cdot \sin(n\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

(БШ) нын аткарылышы үчүн,

$$T_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

болот деген шартты эске алууга туура келет. Анда (28) теңдемелерин (29) баштапкы шартына баш ийген чыгарылыштары

$$T_n(t) = \int_0^1 f_n(\tau) e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} d\tau \quad \text{көрүнүштө табылат.}$$

$T_n(t)$ нын табылган маанисин (26) катарына койсок, (24) маселенин чыгарылышы болгон $v(x, t)$ функциясын

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 f_n(\tau) e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} d\tau \right] \cdot \sin(n\pi x) \quad (30)$$

көрүнүштө табабыз.

Ошентип, бир тектүү эмес диффузиялык теңдемеге коюлган маселенин (23) көрүнүштөгү чыгарылышын, табылган (22^A) жана (30) чыгарылыштарын негизинде

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 f_n(\tau) e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} d\tau \right] \cdot \sin(n\pi x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(n\pi x) dx \right] e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \cdot \sin(n\pi x) \quad (31)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Эскертүү.

1. Эгерде

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\text{ЖТДТ})$$

теңдемесине бир тектүү эмес чек ара жана баштапкы шарттар

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(1, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

көрүнүштө берилсе, (ЧШ) – бир тектүү эмес болгондуктан Фурьенин өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын тикелей колдонууга болбойт. Ошондуктан $u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$ белгилөөсүн жардамы менен жаңы $v(x, t)$ функциясын киргизебиз. Мында $\omega(x, t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \cdot x$ көрүнүштө жазылган белгилүү жардамчы функция. Мындай белгилөөдөн кийин каралуучу бир тектүү

эмес маселе, белгисиз $v(x, t)$ функциясына карата жогоруда коюлган маселеге келип, анын чыгарылышы (31) сыяктуу табылат.

2. Эгерде стержендин узундугу l болсо, (22) чыгарылышы

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

көрүнүштө жазылат. Мында x өзгөрүлмөсү $[0, l]$ кесиндисинде каралып,

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

чексиз системасын ортогоналдык касиетинен улам, $\varphi(x)$ функциясын синустар боюнча Фурьенин

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

катарына ажыралышынан, A_n коэффициенттери

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

көрүнүштө болот.

4. Көнүгүүлөр

1. А, В жана λ турактууларын каалагандай маанилеринде

$$u(x, t) = e^{-(\lambda\alpha)^2 t} \cdot \{A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)\}$$

функциясын $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}$ теңдемесине чыгарылыш болорун текшергиле.

2. $\sin m\pi x \sin n\pi x = \frac{1}{2} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$ формуласын пайдаланып

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } n \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{эгерде } n = m \end{cases}$$

болорун көрсөткүлө.

3. $\varphi(x) = 1$ функциясын $[0, 1]$ кесиндисинде Фурьенин синустар боюнча катарына ажыраткыла жана ажыралыштын алгачкы эки – үч мүчөсүн графиктерин сызгыла.

4. Жогорку 3 – мисалды пайдаланып,

$$u_t(x, t) = u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (\text{ЧШ})$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{БШ})$$

аралаш маселесин чыгарылышын тапкыла.

5. Эгерде (БШ) $u(x, 0) = x - x^2$, $0 < x < 1$ көрүнүштө берилсе, анда 4 – мисалда берилген маселенин чыгарылышын тапкыла.

6. Узундугу π болгон стержендин учтарында нөл градус температура сакталып, баштапкы температура $u(x, 0) = 2 \sin(3x)$ формуласы менен берилсин. t – убактысын ($t > 0$) каалагандай моменти үчүн стержендин температурасын аныктагыла.

7. Узундугу l болгон стержендин учтарында турактуу нөл градус температура болуп, баштапкы температура

$u(x, 0) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 5 \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$ формуласы менен берилсе, убакыттын ар бир t – ирмеминдеги стержендин температурасын аныктагыла.

Жооптор. 6. $u(x, t) = 2e^{-9\alpha^2 t} \cdot \sin(3x)$;

7. $u(x, t) = 3e^{-\frac{(\pi\alpha)^2}{l^2}t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - 5e^{-\frac{4(\pi\alpha)^2}{l^2}t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$.

20.2.6 Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн жекече туундуларды эсептөөгө жана капталган (свертка) функциялар теориясына колдонуу

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн айрым бир касиеттерине таянып, дифференцирлөөнү арифметикалык көбөйтүүлөр менен алмаштырууга жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди кадимки

алгебралык теңдемелерге келтирүүгө болорун көрсөтөлү. Ал үчүн $-\infty < x < +\infty$ аралыгында аныкталган $f(x)$ функциясын (XIX гл., § 19.1, (13^A), (14^A) – формулалары) Фурье боюнча элестерин бирин (тескерисин түз деп)

$$\Phi\{f\} = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (\text{түз}) \quad (32)$$

$$\Phi^{-1}\{f\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{тескери})$$

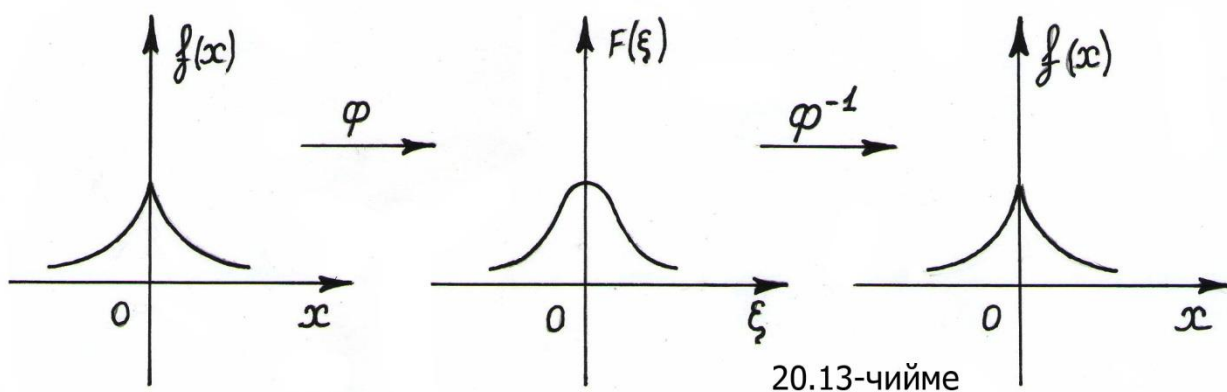
көрүнүштө алалы. Мында $\Phi\{f\}$ – Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн оператордук белгилениши. Ошентип, (32) формулага Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонуу $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ – шартына баш ийген, б.а. $(-\infty, +\infty)$ аралыгында абсолюттук интегралдануучу $f(x)$ функциясын койгондо, жаңы ξ өзгөрүлмөлүү $-\infty < \xi < +\infty$ аралыгында аныкталган $F(\xi)$ функциясына ээ болобуз. Түшүнүктүү болсун үчүн, (32) боюнча айрым функциялардын Фурье – элестерин жазып көрсөтө кетели:

1 - таблица

$f(x)$ функциясы	Фурье – элеси $F(\xi)$
$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{эгерде } x \geq 0 \text{ болсо,} \\ -e^{-x}, & \text{эгерде } x < 0 \text{ болсо.} \end{cases}$	$F(\xi) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\xi}{1 + \xi^2}$ комплексдик функция.
$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{эгерде } x \leq -1, x \geq 1. \end{cases}$	$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$ чыныгы функция.
$f(x) = e^{-x^2}.$	$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(\xi/2)^2}$ чыныгы функция.

Таблицадагы мисалдардан көрүнгөндөй чыныгы өзгөрүлмөлүү $f(x)$ функциясын Фурье боюнча $F(\xi)$ – элестерин аргументтери ξ – чыныгы өзгөрүлмө болгону менен, $F(\xi)$ функциясын өзү комплексдик жана

чыныгы маанилерге ээ боло беришет. Демек, жалпы учурда $F(\xi)$ элес – функциясын чыныгы өзгөрүлмөлүү чыныгы же комплекстик функция деп эсептөөгө болот. Эгерде $-\infty < \xi < +\infty$ аралыгында аныкталган Фурьенин (32) өзгөртүп түзүүсүнө, Фурьенин чагылтуусун тескерисин пайдалансак, анда башында берилген $f(x)$ функциясын тапкан болобуз. Мисалы 20.13 – чиймеден $f(x) = e^{-|x|}$ функциясын түз жана тескери чагылтууларын арасындагы



$$e^{-|x|} \xrightarrow{\Phi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} \xrightarrow{\Phi^{-1}} e^{-|x|} .$$

байланыштарын көрүүгө болот.

Фурьенин өзгөртүп түзүүлөрүн ($1^0 - 7^0$) негизги касиеттери 19.1.4 де көрсөтүлгөнү (XIX гл., § 19.1) менен, анын (ЖТДТ) ны чыгарууда колдонулуучу айрым касиеттерине токтолуп өтөбүз:

1. Жекече туундулардын Фурье – элестери

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн (32) көрүнүшүн тандап, $f'(x)$ функциясы үчүн жазылган 4^0 – касиеттин (§ 19.1) негизинде $u(x, t)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ функциясын u_x, u_{xx} – жекече туундуларын Фурье боюнча элестерин

$$\Phi\{u_x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x, t) e^{-i \xi x} dx = i \xi \cdot \Phi\{u\},$$

$$\Phi\{u_{xx}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x, t) e^{-i \xi x} dx = -\xi^2 \cdot \Phi\{u\}$$

эрежелери менен эсептөөгө болорун көрөбүз. Бул жерде, Фурьенин өзгөртүп түзүүсү x өзгөрүлмөсүнө карата жүргүзүлгөндүктөн интеграл x өзгөрүлмөсү боюнча эсептелип, t турактуу катары гана катышарын эске тутубуз. Ушундай эле эреже менен $u_t(x, t)$, $u_{tt}(x, t)$ – жекече туундуларын x өзгөрүлмөсүнө карата Фурье – элестерин

$$\Phi\{u_t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x, t) e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial \Phi\{u\}}{\partial t},$$

$$\Phi\{u_{tt}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}(x, t) e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \Phi\{u\}}{\partial t^2}$$

көрүнүштөрдө эсептей алабыз.

2. Капталган (Свертка) функциялардын Фурье – элестери

Кандай гана интегралдык өзгөртүп түзүү болбосун капталуу (свертка) касиетине ээ болот. Анткени эки функциялардын көбөйтүндүлөрүн Фурье – элестери, ал функциялардын Фурье элестеринин көбөйтүндүсүнө тең боло бербейт, б.а.

$$\Phi\{f(x) \cdot g(x)\} \neq \Phi\{f(x)\} \cdot \Phi\{g(x)\}.$$

Бирок, функциялардын көбөйтүндүсүнө окшоштурулган $f(x) * g(x)$ же $(f * g)(x)$ символдору менен белгиленген $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларын капталуусу (сверткасы) деген жаңы теорияны колдонсок, анда алар үчүн капталуу (свертка) касиети деп аталган

$$\Phi\{f(x) * g(x)\} = \Phi\{f(x)\} \cdot \Phi\{g(x)\} \quad (33)$$

теңдештиги орун алат.

Берилген $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларын капталуусу деп

$$(f * g)(x) \equiv f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \xi)g(\xi) d\xi \quad (34)$$

*формуласы менен эсептелип табылган, x өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон жаңы $(f * g)(x)$ функциясын айтабыз (Лапласдын өзгөртүп*

түзүүсү үчүн киргизилген капталуу функциясы §19.3, (44) – формулада берилген).

Мисалы, (34) эрежесин пайдаланып $f(x) = x$ менен $g(x) = e^{-x^2}$ функцияларын капталуусун табалы:

$$(f * g)(x) = (x * e^{-x^2})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)e^{-\xi^2} d\xi = \frac{x}{2}.$$

$$\text{Мында } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \text{ болору эске алынды.}$$

Көпчүлүк (ЖТДТ) ларды чыгарууда функциялардын Фурье – элестерин көбөйтүндүсүнүн да

$$\Phi^{-1}[\Phi\{f(x)\} \cdot \Phi\{g(x)\}] \quad (35)$$

тескерисин табуу зарылчылыгы келип чыгат. Бул учурда (33) теңдештигин эки жагына тең Фурьенин тескери чагылтуусун колдонсок, анда

$$\Phi^{-1}[\Phi\{f * g\}] = \Phi^{-1}[\Phi\{f\} \cdot \Phi\{g\}] \text{ же}$$

$$f * g = \Phi^{-1}[\Phi\{f\} \cdot \Phi\{g\}] \quad (36)$$

теңдештигине ээ болобуз. Демек (35) ти табуу үчүн, адегенде $\Phi\{f(x)\}$ жана $\Phi\{g(x)\}$ көбөйтүүчүлөрүн ар бирин $f(x)$ жана $g(x)$ оригиналдарын таап, табылган оригинал функциялардын капталуусун (34) формуласы боюнча эсептеп коюу керек.

20.2.7 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган Кошинин маселесин Фурьенин өзгөртүп түзүүсү менен чыгаруу Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, 0 < t < +\infty, & (\text{ЖТДТ}) \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty & (\text{БШ}) \end{cases} \quad (37)$$

көрүнүштөгү Кошинин маселесин карап $\varphi(x)$, u_t , u_{xx} – функцияларын x өзгөрүлмөсүнө карата Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнүн шарттарына баш ийет десек, коюлган (37) маселесине Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонгондон кийин, аны

$$\begin{aligned} \Phi\{u_t\} &= \alpha^2 \Phi\{u_{xx}\}, \\ \Phi\{u(x, 0)\} &= \phi\{\varphi(x)\} \end{aligned} \quad \text{же}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= -\alpha^2 \xi^2 U(t), \\ U(0) &= \phi(\xi) \end{aligned} \quad (38)$$

көрүнүштөгү маселеге келтиребиз. Мында $\phi(\xi)$ – функциясы $\varphi(x)$ тин, ал эми $U(t)$ – функциясы $u(x, t)$ тин Фурье – элестери болушат: $\phi(\xi) = \Phi\{\varphi(x)\}$, $U(t) = \Phi\{u(x, t)\}$. Албетте, $U(t)$ функциясы t өзгөрүлмөсүнөн башка ξ ден да көз каранды, бирок (38) теңдемесинде ξ турактуу катары катышкандыктан, $U(\xi, t) = U(t)$ – функциясын t дан гана көз каранды деп эсептейбиз. Ошондуктан кадимки дифференциалдык теңдемеге коюлган (38) Кошинин маселесин чыгарылышын

$$U(t) = \phi(\xi) \cdot e^{-\alpha^2 \xi^2 t} \quad (39)$$

көрүнүштө жазууга болот.

(37) маселесин $u(x, t)$ чыгарылышын табуу үчүн (39) га Фурьенин тескери чагылтуусун

$u(x, t) = \Phi^{-1}\{U(\xi, t)\} = \Phi^{-1}\{\phi(\xi) \cdot e^{-\alpha^2 \xi^2 t}\}$ колдонобуз. Мындагы $\phi(\xi)$ менен $e^{-\alpha^2 \xi^2 t}$ функцияларын көбөйтүндүсүн Фурье боюнча тескери элестерин табууда, функциялардын капталуу теориясын (36) – касиетине таянабыз. Анда айтылган касиетти, 1 – таблицаны жана капталуунун (34) эрежесин пайдаланып, $u(x, t)$ чыгарылышын

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Phi^{-1}\{\phi(\xi) \cdot e^{-\alpha^2 \xi^2 t}\} = \Phi^{-1}\{\phi(\xi)\} * \Phi^{-1}\{e^{-\alpha^2 \xi^2 t}\} = \\ &= \varphi(x) * [e^{-x^2 Y 4 \alpha^2 t}] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi \end{aligned}$$

$$\text{же } u(x, t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi \quad (40)$$

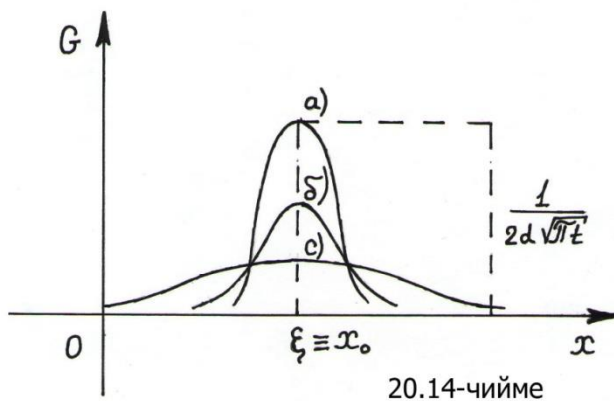
көрүнүштө таба алабыз. (40) ты **Пуассондун формуласы** (*интегралы*) деп да аташат.

Табылган (40) чечиминде интеграл алдындагы функция эки

1. $\varphi(x)$ – баштапкы температура,

$$2. G(x, t, \xi) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}}$$

функцияларын көбөйтүндүсүнөн турарын көрөбүз. Мындагы $G(x, t, \xi)$ – функциясы **Гриндин функциясы** же **таянуу функциясы** деп аталып, убакыттын t ирмеинде стержендин $x = \xi$ чекитине *жылуулуктун бирдик импульсу* таасирин тийгизген учурдагы, стержендеги температуранын бөлүштүрүлүшүн сүрөттөйт. 20.14 – чиймеде $x = \xi$ чекитине берилген *жылуулуктун бирдик импульсуна* жараша $G(x, t)$ функциясын жооп берген турумдары көрсөтүлгөн. а) – абалында $G(x, t)$ функциясын анча чоң эмес маанилери,



абалдарында $G(x, t)$ функциясын сезилерлик кемип кеткен маанилери сүрөттөлгөн.

Ошентип, (40) формуласында: баштапкы $u(x, 0) = \varphi(x)$ температурасын континуум сандагы $x = \xi$ чекиттериндеги, чоңдугу $\varphi(\xi)$ болгон

импульстардын көптүгү катары түшүнүп, ар бир чекиттик импульстар температуранын $\varphi(\xi) \cdot G(x, t)$ бөлүштүрүлүшүн жаратат дейбиз. Ал эми жалпы жыйынтыктоочу бөлүштүрүлүү, чекиттик бөлүштүрүлүүлөрдүн суммасы, б.а. интегралы катарында (40) формуласы менен берилет.

Мисалы, Кошинин

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & 0 < t < +\infty, & \text{(ЖТДТ)} \\ u(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2}}, & & -\infty < x < +\infty & \text{(БШ)} \end{cases}$$

маселесинде $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\alpha = 1$ болгондуктан, анын чыгарылышы Пуассондун (40) формуласы боюнча

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \quad \text{болот.} \quad (*)$$

► Барабардыктын оң жагындагы интегралды

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2-2x\xi+\xi^2}{4t}} d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{x\xi}{2t} - \frac{\xi^2}{4t}} d\xi = e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+2t}{2t} \left(\xi - \frac{x}{1+2t}\right)^2} d\xi. \end{aligned}$$

көрүнүшкө өзгөртүп түзүп, өзгөрүлмөнү $\lambda = \frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}} \left(\xi - \frac{x}{1+2t}\right)$ алмаштыруу ыкмасын жүргүзсөк, анда акыркы интегралды

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1+2t}{2t} \left(\xi - \frac{x}{1+2t}\right)^2} d\xi = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Табылган маанилерди (*) барабардыгын оң жагындагы интегралдын ордуна коюп, коюлган маселенин

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}} = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \quad t > 0$$

чыгарылышын табабыз. Табылган чечимдин берилген баштапкы шартты жана теңдемени канааттандыраарын текшерип көрсөнөр болот. ◀

Эскертүү.

1. Пуассондун (40) формуласы жылуулуктун стержень бойлоп ыкчам тараларын көрсөтөт, ал эми бул формулага катышкан Гриндин же таянуу функциясы $G(x, t, \xi) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}}$ – жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин

фундаменталдык чечими деп аталат. Чынында эле, таянуу функциясын x, t өзгөрүлмөлөрүнө карата функция деп эсептеп, аны $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}$ теңдемесине чечим болорун ордуна коюу жолу менен текшерип көрүүгө болот. 20.14 – чиймеде белгиленгендей фундаменталдык чечим (таянуу функциясы), физикалык жактан чекиттеги жылуулук импульстарын мүнөздөп турат.

Мисалы, температуранын $\varphi(x)$ – баштапкы бөлүштүрүлүшү

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{эгерде } |x - x_0| < \varepsilon \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } |x - x_0| > \varepsilon \text{ болсо} \end{cases}$$

көрүнүштө болсун десек, анда Пуассондун (40) формуласы боюнча

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi \quad \text{чыгарылышы табылат.} \end{aligned}$$

Каралган аралыктан $\xi \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ чекити табылып, орточо маани жөнүндөгү теореманын негизинде интегралдын маанисин

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi = 2\varepsilon \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4\alpha^2 t}}$$

деп алсак, анда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \cdot 2\varepsilon \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4\alpha^2 t}} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4\alpha^2 t}}$$

чыгарылышына ээ болобуз. Мындан $\varepsilon \rightarrow 0$ умтулгандагы пределге өткөндө

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\alpha^2 t}} = G(x, t, x_0)$$

келип чыгат. Эгерде баштапкы $t = 0$ моментинде $x = x_0$ чекитин өзүндө температура ($\varepsilon \rightarrow 0$ умтулганда $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow +\infty$) чексиз жогорулап, калган чекиттерде нөл болуп кала берсе, анда $G(x, t, x_0)$ функциясы убакыттын $t > 0$ ирремдеринде стержендеги температуранын бөлүштүрүлүшүн сүрөттөйт. Температуранын мындай баштапкы бөлүштүрүлүшү өтө кыска убакытта $t = 0$ моментинде $x = x_0$ чекитинде узун ничке от жалыны көтөрүлүп (тыгыздыгы $s \cdot \rho$ болгон жылуулук импульсу), кайра өчкөндөй абалды сүрөттөйт. 20.14 – чиймеде $x = x_0 \equiv \xi$

чекитиндеги убакыттын ар башка $0 < t_1 < t_2 < t_3$ ирмемдериндеги жылуулук импульсунун $a)$ – көтөрүлгөн, $b), c)$ – кийинки өчүп баруу абалдары сүрөттөлгөн.

2. Температуранын баштапкы импульстук бөлүштүрүүлөрү $\delta(x - x_0)$ символу менен белгиленген

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } x \neq x_0 \text{ болсо,} \\ +\infty, & \text{эгерде } x = x_0 \text{ болсо} \end{cases}$$

Дирактын δ – дельта функциясы (2 – бөл., §6.2. , 6.7 – 6.10 формулалар) менен мүнөздөлөт. x_0 чекитин кармап турган (α, β) интервалында өзгөргөн x тер үчүн:

$$a) \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - x_0) dx = 1,$$

$$b) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{эгерде } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } x_0 \notin (\alpha, \beta) \text{ болсо} \end{cases}$$

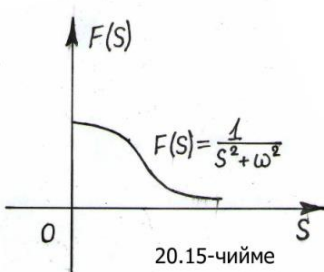
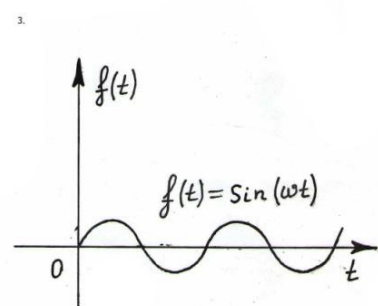
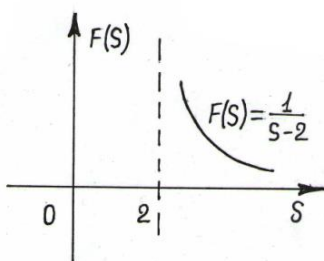
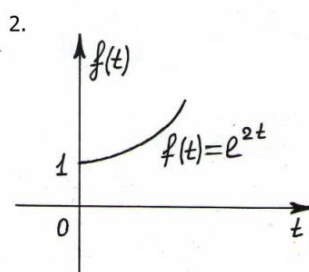
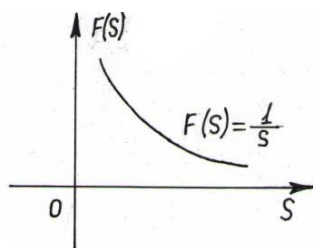
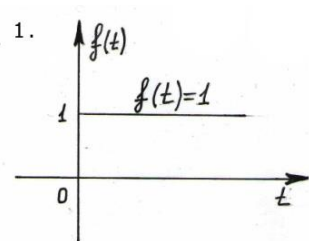
касиеттери орун алат.

20.2.8 Жекече туундулардын жана капталган функциялардын Лаплас – элестерин табуу

Лапластын

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (\text{түз}) \quad (41)$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \quad (\text{тескери})$$



чагылтуулары, Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнө караганда айрым артыкчылыктарга ээ. Атап айтканда интеграл алдындагы туюнтмага ыкчам кемип баруучу e^{-st} – көбөйтүүчүсү катышкандыктан $f(t) \cdot e^{-st}$ көбөйтүндүсүн чектелүү (басаңдап өчүү) мүмкүнчүлүгү жогорулап, Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонууга мүмкүн болгон функциялардын классы кеңейет. Анткени Фурьедеги интеграл

алдындагы туюнтмага катышкан $e^{i \xi x}$ көбөйтүүчүсү ыкчам кемибейт жана модулу 1 ге барабар, ошондуктан интеграл алдындагы туюнтманы басаңдатып өчүрүүгө жөндөмү азыраак.

Ошентип, Лапластын чагылтуусун $[0, +\infty)$ аралыгында өзгөргөн каалагандай x, y, t, \dots өзгөрүлмөлөрү боюнча колдонууга болот. Бирок, Лапластын (41) өзгөртүп түзүүсүн көбүнчө убакытты мүнөздөгөн t – өзгөрүлмөсүнө карата колдонуу ыңгайлуу, анткени убакыт оң жана $[0, +\infty)$ аралыгында өзгөрөт. Эгерде Лапластык чагылтууну кадимки дифференциалдык теңдемеге колдонсок, анда ал алгебралык теңдемеге айланат. Ал эми жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеге колдонсок, ал кадимки дифференциалдык теңдемеге же өзгөрүлмөлөрү бирге кыскарган жаңы жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеге өзгөрөт. 20.15 – чиймеде айрым функциялардын оргиналдарын жана Лаплас – элестерин графиктерде көрсөтөбүз.

Лапластын өзгөртүп түзүүлөрүн (XIX гл., § 19.2, § 19.3) жашоо шарттарын жана негизги $(1^0 - 10^0)$ касиеттерин жетекчиликке алып, $u(x, t)$ функциясын u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} жекече туундулары Лапластын

өзгөртүп түзүүсүнүн жашоо шарттарына баш ийет деп ойлоп, алардын t өзгөрүлмөсүнө карата Лаплас – элестерин табалы:

$$L\{u_t\} = \int_0^{+\infty} u_t(x, t) \cdot e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} dv = u_t dt, u = e^{-st} \\ v = u, du = -s e^{-st} dt \end{array} \right| =$$

$$= uv|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v du = u e^{-st}|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} dt = s U(x, s) - u(x, 0),$$

$$L\{u_{tt}\} = \int_0^{+\infty} u_{tt}(x, t) \cdot e^{-st} dt = s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - u_t(x, 0),$$

$$L\{u_x\} = \int_0^{+\infty} u_x(x, t) \cdot e^{-st} dt = \frac{\partial U(x, s)}{\partial x},$$

$$L\{u_{xx}\} = \int_0^{+\infty} u_{xx}(x, t) \cdot e^{-st} dt = \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2}.$$

Мында $U(x, s)$ – деп $u(x, t)$ функциясын Лаплас – элеси

$L\{u(x, t)\} = U(x, s)$ белгиленип, ал эми $L\{u_x\}$ жана $L\{u_{xx}\}$ жекече туундуларын Лаплас – элестери интегралдан параметр боюнча

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df(x, y)}{dx} dy$$

туунду алуу эрежесине таянып эсептелди .

Чектелген аралыкта функциялардын капталуусун аныктоо

Фурьенин өзгөртүп түзүүсүндө эки $f(x)$, $g(x)$ – функцияларын (34) капталуусу, чектелбеген $(-\infty, +\infty)$ аралыгы боюнча алынган интеграл менен түзүлсө, Лапластын өзгөртүп түзүүсүндө функциялардын капталуусу чектүү $(0, t)$ аралыгы боюнча эсептелген

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \text{ же}$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (42)$$

интегралдарын мааниси катарында түзүлөт (§19.3, 19.4 - аныктама). Бул эки интегралдардын маанилери тең болорун далилдөөгө болот. Мисал катары $f(t) = t$, $g(t) = t$ функцияларын чектелген аралыктагы капталуусун эсептеп көрөлү:

$$(f * g)(t) = t * t = \int_0^t \tau (t - \tau) d\tau = \left(\frac{\tau^2 t}{2} - \frac{\tau^3}{3} \right) \Big|_0^t = \frac{t^3}{6} .$$

Функциялардын чектелбеген аралыктагы (34) капталуусу сыяктуу эле, чектүү аралыктагы (42) капталуусу

$$L\{f * g\} = L\{f\} \cdot L\{g\} \quad (43)$$

$$\text{же ага эквиваленттүү } L^{-1}[L\{f\} \cdot L\{g\}] = f * g \quad (44)$$

касиеттерине ээ. Бул формулалар $L\{f\} \cdot L\{g\}$ сыяктуу көбөйтүнүндүлөрдүн тескери Лаплас – элестерин, оригинал $f(t)$, $g(t)$ функцияларын $f * g$ капталуусу аркылуу эсептөөгө шарт түзөт. Мисалы $f(t) = 1$, $g(t) = \sin t$ болсо, анда

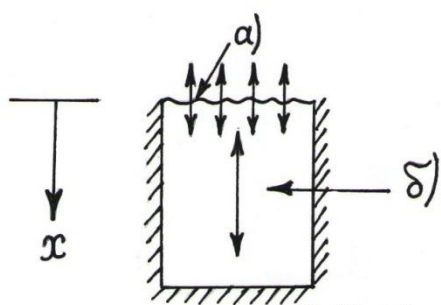
$$\begin{aligned} L^{-1}[L\{f\} \cdot L\{g\}] &= L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right\} = f * g = \\ &= \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t \quad \text{көрүнүштө эсептелет.} \end{aligned}$$

20.2.9 Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган аралаш маселени, Лапластын өзгөртүп түзүүсү менен чыгаруу

Жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, & (\text{ЖТДТ}) \\ u_x(0, t) - u(0, t) &= 0, \quad 0 < t < \infty, & (\text{ЧШ}) \\ u(x, 0) &= u_0, \quad 0 < x < \infty & (\text{БШ}) \end{aligned} \quad (45)$$

аралаш маселени карайлы. Коюлган маселеге физикалык түшүндүрмө берели. Ал үчүн каптал беттери жылуулук өткөрбөй тургандай жасалган түбү терең идишке толтурулган суюктукту карайбыз. Айталы, суюктуктун баштапкы температурасы u_0 , ал эми суюктуктун үстүнкү бетине тийип турган абанын температурасын (температураны ченөөнүн башталышы катарында) 0°C болсун дейли (20.16 – чийме). Чиймеде көрсөтүлгөн жылуулук өткөрүмдүүлүк схемасында:



$u(0, t) < 0$ болсо жылуулук абадан идиштин ичине карай, ал эми $u(0, t) > 0$ болсо сыртына карай агат; б) – идиш өтө терең болгондуктан, анын түбүндөгү чек ара шарты биз караган x тин мааилериндеги чыгарылышка таасирин тийгизе албайт – дегенди көрсөтөт. Биздин максат,

убакыттын ар кандай ирмемдеринде ар кандай тереңдиктердеги суюктуктун температураларын талаасын табуу болуп эсептелет.

Коюлган маселени чыгаруу үчүн (45) маселенин (ЖТДТ) жана (ЧШ) сына t өзгөрүлмөсү боюнча Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонсок,

$$sU(x) - u_0 = \frac{d^2U(x)}{dx^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad (\text{КДТ}) \quad (46)$$

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = U(0) \quad (\text{ЧШ})$$

$x = 0$ чекитинде бир гана чек ара шарты коюлган x өзгөрүлмөсүнө карата экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемесине ээ болобуз. Бирок, иш жүзүндө физикалык ой жүгүртүүгө негизделген экинчи чек ара шарты да, $x \rightarrow +\infty \Rightarrow U(x) \rightarrow 0$ көрүнүштө коюлган деп эсептөөгө болот. Жазуу ыңгайына карап (46) да $U(x)$ функциясы көз каранды болгон s параметри турактуу катары көрсөтүлгөн жок, б.а. $U(x, s) \equiv U(x)$. Ошондуктан (46) ны бир гана x өзгөрүлмөсүнө карата экинчи тартиптеги бир тектүү эмес (КДТ) деп эсептөөгө болот.

Бир тектүү эмес (46) кадимки дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими: "бир тектүү бөлүктүн жалпы чечими + бир тектүү эмес бөлүктүн бир жекече чечими" – эрежеси менен

$$U(x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s}$$

көрүнүштө табылат. Табылган чечим $x \rightarrow +\infty \Rightarrow U(x) \rightarrow 0$ шартына жана (46) дагы (ЧШ) га баш ийиши керек.

Бул шарттардан $x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\sqrt{s}x} \rightarrow \infty$ ыкчам өсүп, баштапкы убакытта температура чексиз чоңоюп кеткендиктен c_1 турактуусун $c_1 = 0$ деп тандоого туура келерин көрөбүз. Ал эми c_2 турактуусун $x = 0$ чекитиндеги чек ара

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = U(0) \equiv c_1 + c_2 + \frac{u_0}{s} \quad \text{шартында туундунун}$$

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \left(c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s} \right) \right|_{x=0} = c_2 \left. \frac{d}{dx} (e^{-\sqrt{s}x}) \right|_{x=0} =$$

$$= -c_2 \sqrt{s} \cdot e^{-\sqrt{s}x} \Big|_{x=0} = -c_2 \cdot \sqrt{s} \quad \text{маанисин эсептеп,}$$

$$-c_2 \cdot \sqrt{s} = c_2 + \frac{u_0}{s} \quad \text{теңдештигинен}$$

$c_2 = \frac{u_0}{s(\sqrt{s}+1)}$ көрүнүштө аныктайбыз. Мындан (46) нын жалпы чыгарылышын

$$U(x) = u_0 \left[\left(\frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s(\sqrt{s}+1)} \right) \right] + \frac{u_0}{s} \quad (47)$$

көрүнүштө жазууга болору келип чыгат.

Акырында коюлган (45) маселесин чыгарылышын (47) ге Лапластын

$$u(x, t) = L^{-1}\{U(x, s)\}$$

тескери чагылтуусун колдонуу менен табабыз.

Эскертүү. 1. Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын бир тектүү теңдемелерди чыгарууда гана колдонуу мүмкүнчүлүгү болсо, Лапластын өзгөртүп түзүүсүн бир тектүү эмес теңдемелерди чыгарууда колдонууга болот. Бирок, өзгөрүлмө коэффициенттүү бир тектүү (ЖТДТ) лерге өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын колдонууга болгону менен, Лапластын чагылтуусун колдоно албайбыз. Төмөндө кайсы учурда кайсыл ыкманы колдонууга болорун таблицада көрсөтөлү:

2 - таблица

Теңдеменин түрлөрү	Ыкмалар	
	Лапластын чагылтуусу	Өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу
Бир тектүү эмес (ЖТДТ)	ооба	жок
Бир тектүү эмес (ЧШ)	ооба	жок
Өзгөрүлмө коэффициенттүү (ЖТДТ)	жок	ооба
Сызыктуу эмес (ЖТДТ)	жок	жок

2. t өзгөрүлмөсү боюнча Лапластын өзгөртүп түзүүсүн xOt тегиздигин, Ox огуна проекциялоо катарында элестетибиз жана анын натыйжасында берилген теңдемени, баштапкы жана чек ара шарттары жаңыдан коюлган жаңы дифференциалдык теңдемеге айлантабыз.

3. Лапластын өзгөртүп түзүүсүн ар кандай диффузиялык теңдемелерге коюлган ар башка маселелерге колдонуу ыкмаларына токтолбойбуз. Кызыгуучулар үчүн кошумча адабияттарды окууну сунуш кылабыз.

5. Көнүгүүлөр

1. Чектелбеген бир тектүү стержень берилген. Эгерде баштапкы температура

$\varphi(x) = u_0 e^{-\sigma^2 x^2}$, $0 < x < +\infty$ ($u_0 > 0$, $\sigma > 0$ – оң турактуулар) болсо, анда убакыттын ар бир $t > 0$ моменттеринде стержендин температурасы

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4\alpha^2\sigma^2 t}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{1+4\alpha^2\sigma^2 t}}$$
 көрүнүштө болорун текшергиле.

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ болсо,} \\ e^{-x}, & \text{болсо } x > 0 \end{cases}$ функциясын Фурье – элесин тапкыла (таблицаларды пайдалан).

3. Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн пайдаланып, Кошинин

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) &= e^{-x^2}, & -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

маселесин чыгаргыла.

4. Лапластын өзгөртүп түзүүсүн пайдаланып, Кошинин

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \sin x, \quad -\infty < x < +\infty$$

маселесин чыгаргыла.

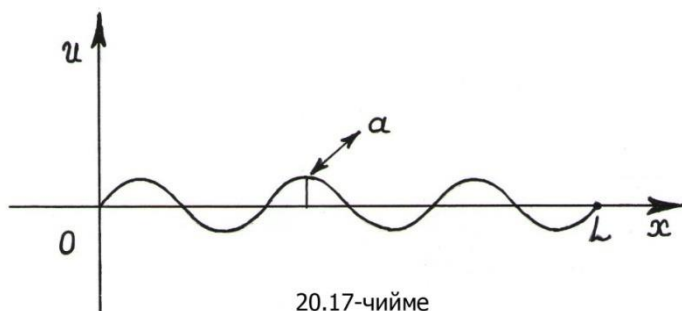
5. Лапластын өзгөртүп түзүүсүн t өзгөрүлмөсүнө карата колдонуп,

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(0, t) = \sin t, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < +\infty$$

§20.3 Бир өлчөмдүү гиперболалык теңдемелер

20.3.1 Кылдын термелүүсү

Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин дагы бир өкүлү болгон гиперболалык теңдемелерди кароону, кылдын туурасынан кесилиши боюнча термелүүсүн сүрөттөгөн бир өлчөмдүү термелүү теңдемесин үйрөнүү менен баштайбыз.



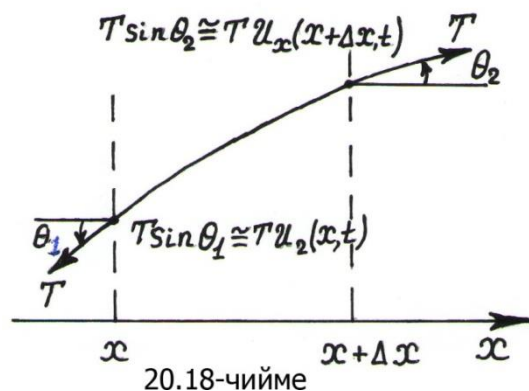
Узундугу L болгон, учтары бекем катырылып керилген кылдын майда термелүүсүн карайлы. Айталы кыл, бир тектүү материалдан жасалып, болушунча керилген болсун (20.17 – чийме). a деп кылдын

тең салмактуулук абалынан четтөө (козголуу) аралыгын белгилеп, кылдын оордук күчү термелүү процессине таасир этпейт дейли. Кылдын термелүүсүн математикалык моделин түзүү үчүн, кылдын анча чоң эмес Δx бөлүгүнө таасир эткен бардык күчтөрдү карайбыз. Бул күчтөр Ньютондун кыймылдоо мыйзамына жараша: “Кылга таасир эткен күчтөрдүн суммасы, импульстун өзгөрүүсүнө тең” – болот. 20.18–чиймеде кылга x – огуна перпендикуляр багытта таасир берген күчтөр көрсөтүлгөн:

1. Кылдын созулуусунан кийинки түздөлүү аракетинен келип чыккан күч ($\alpha^2 u_{xx}$). Бул күчтүн туурасынан кесилишин түзүүчүсүнүн (компонентасынын) чоңдугу

Күч = $T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1 \cong T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]$ формуласы менен эсептелет.

2. $F(x, t)$ – сырткы күч. Кылга сырттан таасир эткен $F(x, t)$ күчү x, t өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болбой, бардык моменттерде бирдей болуп калышы да мүмкүн. Мисалы :



а) Гравитациялык $F(x, t) = -mg$ күчү;

б) Убакыттын ар кандай моменттеринде кыл бойлоп таралуучу импульстар;

в) Үн толкундарын таасири менен кыл тагылган барабандын бетине аракет кылган күчтөр.

3. Кылга таасирин тийгизген сүрүлүү күчтөрү ($-\beta u_t$). Эгерде кыл кайсы бир чөйрөдө термелсе, анда чөйрөнүн каршылык күчү u_t – ылдамдыгына пропорционалдуу болот.

4. Кайра кайтып келүүчү күч ($\gamma \cdot u$). Бул күч кылдын тең салмактан четтөө багытына каршы багытталып, четтөө u аралыгын оң десек, анда бул күч терс болот.

Эгерде сөз кылынган күчтөрдү эске алуу менен кылдын анча чоң эмес Δx бөлүгүнө Ньютондун кыймылдоо мыйзамын колдонсок, анда

$$\Delta x \cdot \rho \cdot u_{tt} = T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + \Delta x \cdot F(x, t) - \Delta x \cdot \beta \cdot u_t(x, t) - \Delta x \cdot \gamma \cdot u(x, t)$$

теңдештиги келип чыгат. Бул теңдештигин эки жагын тең Δx ке бөлүп жиберип $\Delta x \rightarrow 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, анда *телеграфтык теңдеме* деп аталуучу

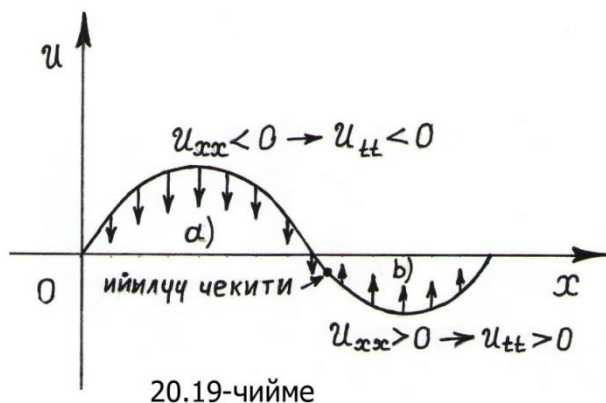
$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta \cdot u_t - \gamma \cdot u + F(x, t) \quad (48)$$

теңдемеге ээ болобуз. Бул теңдемеде, жөнөкөйлүк үчүн кыл жасалган материалдын тыгыздыгы $\rho = 1$ деп алынгандыктан $\alpha, \beta, \gamma, F(x, t)$ чоңдуктары ρ го бөлүнбөстөн, мурдагы жазылыштарын сактап калышты.

(48) теңдемесин жөнөкөй учуру катары алынган

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} \quad (49)$$

теңдемесин, *толкундун теңдемеси* деп атап, аны физикалык жактан 20.19 – чиймеде көрсөтүлгөн кыяктын кылын термелүүсү сыяктуу элестетебиз. *a)* – абалында кылдын x чекитиндеги $u_{tt} < 0$ ылдамдануусу төмөн карай багытталып, $u_{xx} < 0$ иймейүүсүн түздөлүү



аракетине (күчүнө) пропорционалдуу болот. *b)* – абалында болсо, кылдын x чекитиндеги $u_{tt} > 0$ ылдамдануусу жогору карай багытталып, $u_{xx} > 0$ иймейүүсүн түздөлүү аракетине (күчүнө) пропорционалдуу болот. Ошентип кылдын x чекитинде тең салмактуу абалдан четтөө

иймектиги u_{xx} канчалык чоң болсо, анын u_{tt} ылдамдануусу ошончолук чоң болору (пропорционалдуулук коэффициенти деп $\alpha^2 = \frac{T}{\rho}$ саны эсептелет) келип чыгат.

Эскертүү. Эгерде $u = u(x, y, t)$ функциясы үч өзгөрүлмөлүү болсо, анда (49) эки өлчөмдүү толкундун теңдемеси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

ал эми $u = u(x, y, z, t)$ – төрт өзгөрүлмөлүү болсо, анда үч өлчөмдүү толкундун теңдемеси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

көрүнүштөрдө жазылышат.

20.3.2 Даламбердин формуласы. Кубалашкан толкундар ыкмасы

Толкундун (49) теңдемесине чектелбеген аралыкта коюлган Кошинин

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{БШ})$$

маселесин чыгаралы. Белгисиз $u(x, t)$ – функциясы убакыттын t ирмеинде кылдын x чекитин тең салмактык абалдан четтөө аралыгы болуп, убакыттын токтотулган бир t ирмеиндеги бардык x чекиттерин абалы $u = u(x, t)$ функциясын t ирмеиндеги графиги болот.

► **1 – кадам.** Адегенде (x, t) координаталарын $\begin{cases} \xi = x + \alpha t, \\ \eta = x - \alpha t \end{cases}$ өзгөртүп түзүүлөрүн жардамы менен жаңы (ξ, η) координаталар менен алмаштырып алалы. Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу менен ЖТДТ ны чыгарууга жеңил теңдемелерге келтирүү, дифференциалдык теңдемелер теориясындагы негизги ыкмалардын бири болуп эсептелет жана жаңы (ξ, η) координаталары каноникалык деп аталышат.

Анда теңдемедеги жекече туундулар

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi + u_\eta, \quad u_t = \alpha \cdot (u_\xi - u_\eta), \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = \alpha^2 \cdot (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \end{aligned} \quad (50)$$

эрежелери менен эсептелишип, берилген (ЖТДТ) жаңы өзгөрүлмөлөргө карата

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{же} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (51)$$

көрүнүштө өзгөрүп жазылат.

2 – кадамда өзгөргөн (51) теңдемени чыгаруу үчүн, аны оболу ξ өзгөрүлмөсү боюнча интегралдап (η турактуу параметр катары

катышат) , интегралдоодон келип чыккан $u_\eta = C_1$ турактуусун η дан көз каранды эркин алынган $C_1 = \varphi_1(\eta)$ функция деп,

$$u_\eta = \varphi_1(\eta)$$

көрүнүшкө келтиребиз. Экинчи жолу η өзөрүлмөсү боюнча интегралдасак, өзгөрүлгөн теңдеменин жалпы чыгарылышын

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi_1(\eta) d\eta + C_2 = \theta_1(\eta) + \theta_2(\xi)$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мында $\theta_1(\eta)$ деп $\varphi_1(\eta)$ нын алгачкы функциясы, ал эми η катышпаган интегралдоо турактуусу деп $C_2 = \theta_2(\xi)$ эркин алынган функциясы белгиленишкен. Ошентип, η өзгөрүлмөсүнө карата эркин тандалган $\theta_1(\eta)$ жана ξ өзгөрүлөсүнө карата эркин алынган $\theta_2(\xi)$ функциялары менен туюнтулган, (51) теңдемесинин

$$u(\xi, \eta) = \theta_1(\eta) + \theta_2(\xi) \quad (52)$$

көрүнүштөгү жалпы чыгарылышын табабыз. Мисалы, эркин алынган

$$u(\xi, \eta) = \sin \eta + \xi^2, \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta} + \operatorname{tg} \xi, \quad u(\xi, \eta) = \eta^2 + e$$

функцияларын (51) теңдемесине чыгарылыш болорун, ордуна коюу менен текшерип көрүүгө болот.

3 – кадамда эски x, t координаталарына кайта келүүнү көрсөтөлү.

Берилген (ЖТДТ) нын жалпы же бардык чыгарылыштарын табуу үчүн, (52) чыгарылышына $\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at \end{cases}$ ордуна коюуларын жүргүзүп,

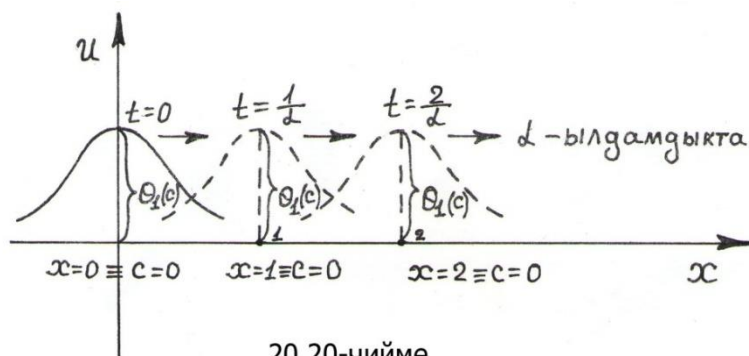
$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (53)$$

ээ болобуз. Физикалык жактан караганда (53) чыгарылышын α ылдамдыгы менен карама – каршы багыттарда кыймылдашкан, эркин формадагы эки толкундардын суммасы катарында кароого болот. Иш жүзүндө $\theta_1(x - at)$, $\theta_2(x + at)$ кошулуучуларын ар бирин (ЖТДТ) ге чыгарылыш деп алууга болот. Мисалы,

$$u(x, t) = \sin(x - at) - \text{солдон онго карай кыймылдаган толкунду},$$

$$u(x, t) = (x + at)^2 - \text{ондон солду карай кыймылдаган толкунду},$$

$u(x, t) = \sin(x - \alpha t) + (x + \alpha t)^2$ – карама – каршы багытта кыймылдаган эки толкундарды



20.20-чийме

сүрөттөгөн функциялар болушат жана ар бири толкундун теңдемесине кадимкидей эле чыгарылыштар болушат.

Мисалы, 20.20 – чиймеде α ылдамдыгында солдон

оңго карай кыймылдаган $u(x, t) = e^{-(x-\alpha t)^2} = \theta_1(x - \alpha t)$ толкуну көрсөтүлгөн. Бул толкунду, убакыттын $t = 0$ ирмеминде $x = 0 \equiv c$ чекитинен α ылдамдыгы менен чыккан байкоочунун оң багыттагы кыймылына салыштырууга болот. Байкоочунун кыймылдагы абалын абциссасы үчүн ылдамдык $\frac{dx}{dt} = \alpha$ болгондуктан, аны интегралдагандан кийин келип чыккан $x + \alpha t = c$ жана $x - \alpha t = c$ теңдештиктерин пайдаланып (c – интегралдоо турактуусу),

$$u(x, t) = e^{-(x-\alpha t)^2} = e^{-c^2} = \theta_1(c) - const.$$

болорун көрөбүз. Мындай байкоочу үчүн кылдын тең салмактуулук абалынан четтөө аралыгы, ар дайыма $\theta_1(c)$ га барабар же турактуу көрүнөрүн байкайбыз.

Ошентип, $u(x, t) = \theta_1(x - \alpha t)$ чыгарылышы Ox огун бойлоп оң багытка кеткен түз толкунду, ал эми $u(x, t) = \theta_2(x + \alpha t)$ чыгарылышы Ox огун бойлоп терс багытка кеткен тескери толкунду мүнөздөшөт.

4 – кадамда (53) чыгарылышына (БШ) га баш ийүү шарттарын карайбыз.

(53) чыгарылышында $\theta_1(x - \alpha t)$, $\theta_2(x + \alpha t)$ функциялары эркин тандалган деп айтып келдик, ошондуктан эркин функцияларды кандайча тандасак, (53) чыгарылышы (БШ) га баш ийе турганын көрсөтөбүз.

$$(БШ) : \Leftrightarrow u(x, 0) \equiv \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = [\theta_1(x - \alpha t) + \theta_2(x + \alpha t)]' |_{t=0} \equiv \\ \equiv -\alpha \cdot [\theta_1'(x) + \theta_2'(x)] = g(x) \quad \text{же}$$

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x), \\ -\alpha \cdot [\theta_1'(x) + \theta_2'(x)] = g(x) \end{cases}$$

теңдемелери келип чыгып, анын экинчисин $[x_0, x]$ аралыгы боюнча

$$-\alpha \cdot \theta_1(x) + \alpha \cdot \theta_2(x) = \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + K$$

интегралдаган соң, белгисиз $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ функцияларына карата эки алгебралык

$$\begin{cases} \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x), \\ -\alpha \cdot \theta_1(x) + \alpha \cdot \theta_2(x) = \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + K \end{cases}$$

теңдемелер системасына ээ болобуз. Мында K – интегралдоо турактуусу. Системаны чыгарып, эркин делген белгисиз функцияларды

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + K/2\alpha, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\alpha} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - K/2\alpha \end{aligned} \quad (54)$$

(БШ) аткарыла тургандай табылган (54) маанилери менен алмаштырабыз. Табылган (54) маанилерин (53) чыгарылышына коюп, башында берилген маселенин

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - \alpha t) + f(x + \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} g(\xi) d\xi \quad (55)$$

жалпы чыгарылышын табабыз.

(55) көрүнүштө табылган чыгарылышты *Даламбердин формуласы* деп, аны *кубалашкан толкундар* ыкмасы менен табылган чыгарылыш деп айтабыз. (55) теги интеграл $[x - \alpha t, x + \alpha t]$ кесиндиси боюнча алынып, иш жүзүндө (54) төгү биринчи $[x - \alpha t, x]$ кесиндиси боюнча

оң багытта, экинчи $[x, x + \alpha t]$ кесиндисинде терс багытта алынган интегралдардын суммасы болот.

Мисалдар

1. Синусоидалык толкундун кыймылы

Эгерде баштапкы шарт

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sin x, \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

көрүнүштө болсо, анда Даламбердин (55) формуласы боюнча толкундун теңдемесин жалпы чыгарылышы

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x - \alpha t) + \sin(x + \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} 0 \, d\xi$$

же $u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x - \alpha t) + \sin(x + \alpha t)]$ көрүнүштө жазылат.

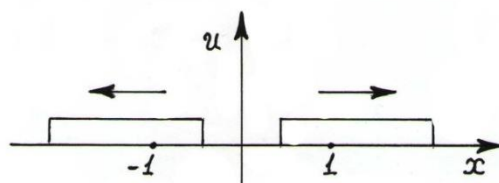
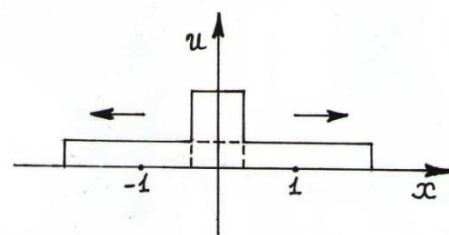
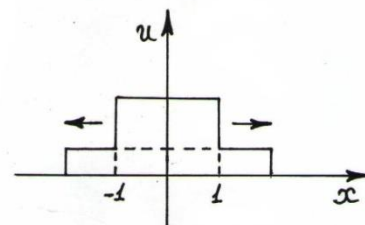
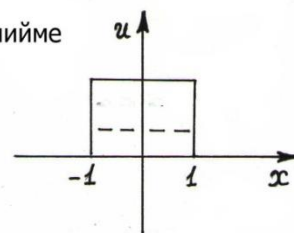
Бул чыгарылышка төмөндөгүдөй түшүндүрмө берүүгө болот: Кылдын тең салмактуу абалдан баштапкы $u(x, 0) = \sin x$ четтөөсү, тең эки

$\frac{\sin x}{2}$ жана $\frac{\sin x}{2}$ бөлүктөргө бөлүнүп, ар бир бөлүк α ылдамдыгы менен бири оң тарапка, экинчиси сол тарапка кыймылдап тараган толкундарды элестетишип, алардын суммасы канаттары карама – каршы тараптарга карап, кайталанып кыймылдоочу синусоидалдык толкун дөбөлөрүндөй көрүнөт.

2. Тик бурчтуу импульстун таралуусу

Бул учурда баштапкы шарт

20.21-чийме



$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{башка чекиттерде,} \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

көрүнүштө болуп, каралган аралыктагы жалпы чыгарылыш

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

турактуусуна барабар болот. Бирок, анын тең салмактуулук абалдан баштапкы четтөөсү карама – каршы тараптарга кыймылдаган эки бөлүктөн туруп, 20.21 – чиймеде көрсөтүлгөнгөндөй схема боюнча тарайт.

3. Баштапкы ылдамдык белгилүү болгон абал

Айталы, кыл баштапкы ирмемде тең салмак абалда болсун. Кылга $\sin x$ түрүндөгү баштапкы ылдамдык берели :

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \sin x.$$

Даламбердин формуласы боюнча толкундун теңдемеси

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} \sin \xi \, d\xi = \frac{1}{2\alpha} [\cos(x + \alpha t) - \cos(x - \alpha t)]$$

көрүнүштөгү жалпы чыгарылышка ээ болуп, эки кыймылдоочу косинусоидалык толкундарды элестетет.

Эскертүү. 1. Экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышына эки эркин турактуулар катышса, экинчи тартиптеги ЖТДТ да эки эркин алынган функциялар катышат. Ошондуктан ЖТДТ нын чыгарылыштары, КДТ нын чыгарылыштарына караганда көбүрөөк деп эсептөөгө болот.

2. Жалпы чечимди табуу жана табылган чыгарылышты (БШ) га коюу ыкмасы, ЖТДТ лерди чыгаруунун жалпы ыкмасы деп эсептелбейт. Жогоруда биз караган маселелде гана ушул ыкманы колдонууга болот. Адатта ЖТДТ лердин жалпы чыгарылышын табуу кыйын, табылган күндө да аны (ЧШ) га коюу көптөгөн татаалчылыктарды жаратат.

20.3.3 Даламбердин формуласын геометриялык жактан чечмелөө

Жогоруда каралган

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (\text{ЖТДТ})$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{БШ})$$

Кошинин маселесин жалпы чыгарылышы, Даламбердин формуласы боюнча

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - \alpha t) + f(x + \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x - \alpha t}^{x + \alpha t} g(\xi) d\xi$$

жазыларын билебиз. Бул чыгарылышка эки учурда сүрөттөмө берели:

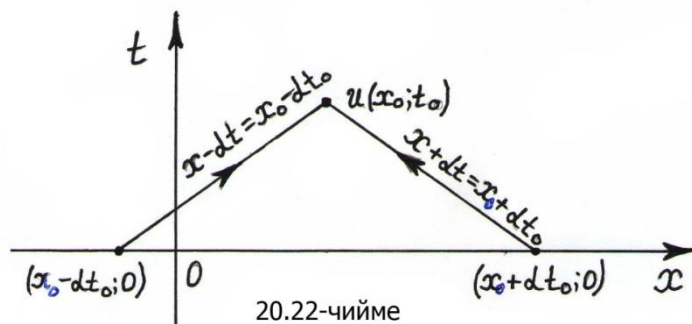
1 – учур. Айталы баштапкы шарт

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

көрүнүштө болсун. Анда Даламбердин формуласы боюнча

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - \alpha t) + f(x + \alpha t)] \quad \text{жалпы чыгарылышына ээ болобуз.}$$

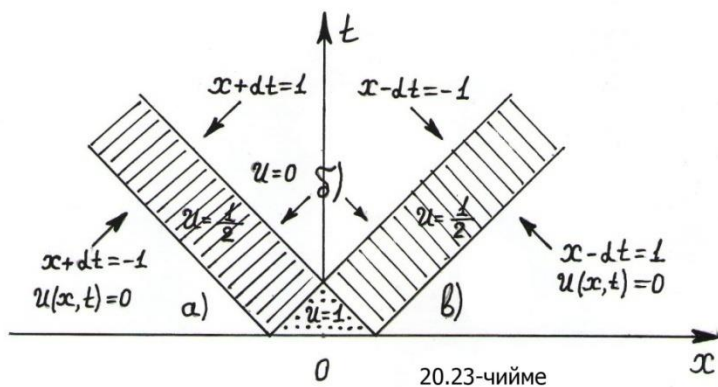
Геометриялык жактан $f(x)$ функциясын $(x_0 - \alpha t_0, 0)$ жана



(20..22 – чийме).

$(x_0 + \alpha t_0, 0)$ чекиттериндеги козголууларын орточо маанисин, xOt тегиздигин (x_0, t_0) чекитиндеги u чыгарылышын мааниси катарында сүрөттөөгө болот

$$(x_0 - \alpha t_0, 0), (x_0 + \alpha t_0, 0) \text{ чекиттери} \quad \begin{aligned} x - \alpha t &= x_0 - \alpha t_0, \\ x + \alpha t &= x_0 + \alpha t_0 \end{aligned}$$



түздөрүн Ox огу менен кесилишүү чекиттери болушат. Бул түздөрдү толкундун теңдемесин мүнөздөгүч түздөрү деп атайбыз.

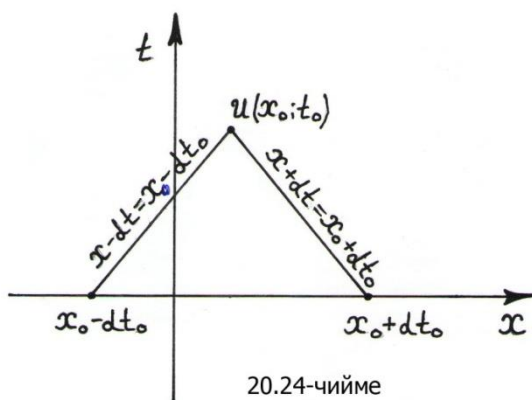
Даламбердин формуласын

жогорудагыдай геометриялык сүрөттөлүшүнө окшоштуруп чыгарылган $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

$$\begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

маселесин чыгарылышын, xOt тегиздигинде 20.23 – чиймедегидей көрсөтүүгө болот. Мында а) – солго кыймылдаган толкундун алдыңкы фронту, б) – толкундун арткы фронту, в) – оңго кыймылдаган толкундун алдыңкы фронту.

2 – учур. Баштапкы козголуу нөлгө тең, ал эми баштапкы ылдамдык каалагандай болгон учурдагы



$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

маселени карайлы. Бул учурдагы жалпы чыгарылыш

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi$$

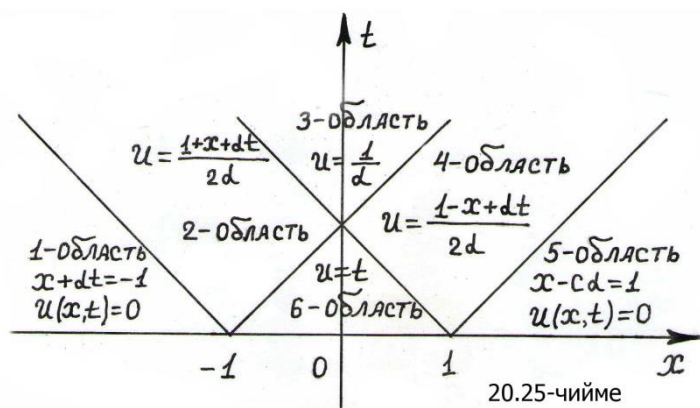
көрүнүштө болот.

u чоңдугун (x_0, t_0) чекитиндеги маанисин, $x_0 - at_0$ чекитинен $x_0 + at_0$ чекитине чейинки аралык боюнча баштапкы ылдамдыктан алынган интегралга барабар деп сүрөттөйбүз (20.24 – чийме).

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \end{cases} \quad (56)$$

маселесин чыгарылышын геометриялык сүрөттөлүшүн 20.25 – чиймеден көрүүгө болот. (56) маселе $-1 < x < 1$ аралыгында кылдын



баштапкы бирдик ылдамдыгын турумдарын же козголууларын сүрөттөйт. Мындай козголуулар Даламбердин формуласы боюнча көрсөтүлөт:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} 0 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 1 - \text{областка болсо,}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{-1}^{x+at} 1 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 2 - \text{областка болсо,}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{+1}^{-1} 1 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 3 - \text{областка болсо,} \quad (57)$$

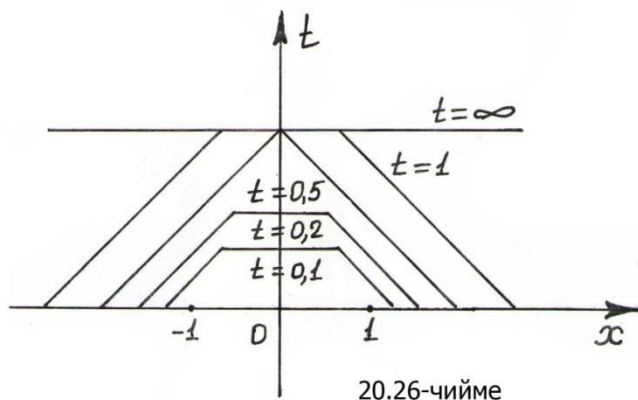
$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{1} 1 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 4 - \text{областка болсо,}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} 0 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 5 - \text{областка болсо,}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} 1 \cdot d\xi, \quad (x, t) \in 6 - \text{областка болсо.}$$

Убакыттын ар кандай t ирмемдериндеги (56) маселесин (57) чыгарылышы 20.26 – чиймеде көрсөтүлөт.

6. Көнүгүүлөр



$\theta_1(x)$ функцияларын тапкыла.

3. Кошинин

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^{-x^2}, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{маселесин чыгарылышын тапкыла.}$$

4. Кошинин

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2}, \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{маселесин чыгарылышын}$$

тапкыла. Убакыттын ар кандай ирмемдериндеги чечимдин графигин сызгыла.

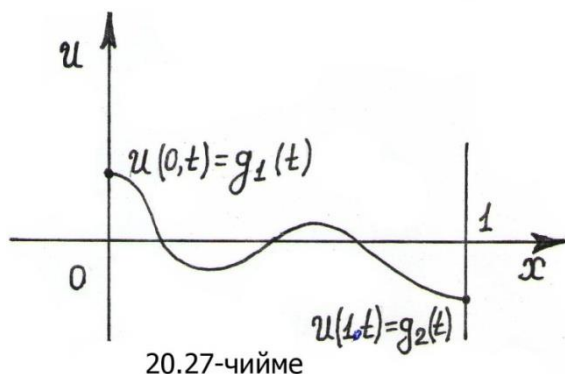
20.3.4 Толкундун теңдемелерине коюлуучу чек ара шарттары

Практикада негизинен толкундун төмөндөгүдөй түрлөрү кездешет:

1. Үн толкундары (узунунан),
2. Жарык жана электромагниттик толкундар,
3. Катуу телолордун термелүүлөрү (узунунан, туурасынан, буралган),
4. Кванттык механикадагы ыктымалдуулук толкундары,
5. Суудагы толкундар (туурасынан кеткен толкундар),

6. Кылдын термелүүлөрү (туурасынан).

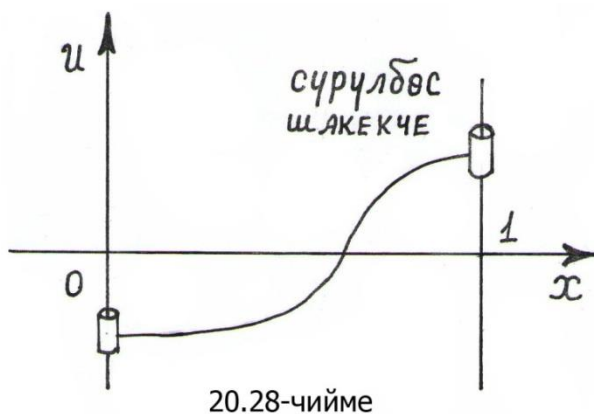
Толкундун теңдемесин, айтылган толкундардын ар бирине математикалык модел деп эсептөөгө болот. Бирок, баяндалган толкундар ар башка физикалык түзүлүштөрдүн толкундуу кыймылдарын мүнөздөшкөндүктөн, аларга мүнөзүнө жараша чек аралык шарттарды берүүгө туура келет. Биз төмөндө бир өлчөмдүү маселелерге коюлуучу сызыктуу чек ара шарттарын үч түрүнө токтолуп өтөбүз:



1 – түрдөгү чек ара шарты. Чек ара чекиттерине коюлган

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t), \\ u(L, t) &= g_2(t) \end{aligned} \text{ режим шартын, } 1 \text{ – түрдөгү чек ара шарты дейбиз.}$$

Мисалы, 20.27 – чиймеде учтары берилген шарттардагы кыймылда болгон кыл көрсөтүлгөн.



2 – түрдөгү чек ара шарты.

Чек ара чекиттеринде берилген

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= g_1(t), \\ u_x(L, t) &= g_2(t) \end{aligned}$$

күчтөрүн, 2 – түрдөгү чек ара шарттары дейбиз. Мисалы,

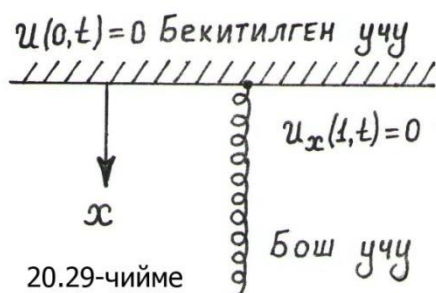
термелген кылдын оң жана сол учтарына тикесинен аракет кылган күчтөрдү $T u_x(0, t)$ жана $T u_x(L, t)$ көрүнүштөрдө туюнтууга болот. Эгерде кылдын учтары вертикальдык багыттарда (сүрүлүү эске алынбайт) термелсе, анда чек ара шарттары (20.28 – чийме)

$u_x(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$ көрүнүштөрдө болот. Адатта мындай чек ара шарттары эки учурда коюлат:

а) Бош учуна карата пружинанын узунунан термелүүсү (20.29 – чийме);

б) Пружинанын бир учуна аракет кылган күчтүн таасири астында термелүүсү.

3 – түрдөгү чек ара шарты. Учтарындагы серпилгич чек ара чекиттерине коюлган

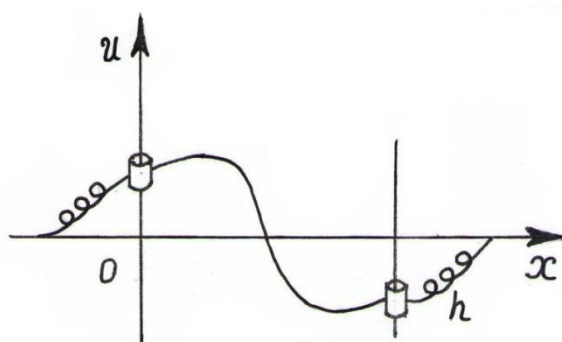


20.29-чийме

$$u_x(0, t) - \gamma_1 u(0, t) = g_1(t),$$

$$u_x(L, t) - \gamma_2 u(L, t) = g_2(t)$$

режим шарттарын, 3 – түрдөгү чек ара шарттары деп атайбыз. Мисал катары учтары серпилгидей катырылган комуздун кылын термелүүсүн кароого болот (20.30 –



20.30-чийме

чийме). Кылдын учтарына катырылган пружиналар пайда кылган вертикалдык күчтөр, кылдын учтарын козголуусуна пропорционалдуу болушат: Сол учунун козголуусу $= u(0, t)$, Оң учунун козголуусу $= u(L, t)$.

Кылдын учтарына пружинанын

таасир этүү күчү:

$$\text{Сол учуна вертикалдык таасир күчү} = Tu_x(0, t),$$

$$\text{Оң учуна вертикалдык таасир күчү} = Tu_x(L, t),$$

T – кылдын созулуп тартылуу чоңдугу.

Ал эми h – козголууларга барабар болгон пружинанын ийилчектик коэффициенттери; γ_1, γ_2 – коэффициенттери T, h тарга байланышкан чоңдуктар.

20.3.5 Чектелген кылдын термелүү теңдемелерин Фурьенин ыкмасы менен чыгаруу

Узундугу L болуп эки учу бекитилген бир тектүү кылдын термелүү теңдемесин чыгарууга Фурьенин өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын колдонолу. Ал үчүн термелүү теңдемесине берилген

$$\text{(ЖТДТ)} \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (58)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

аралаш маселесин карайлы. Бул учурда кыл баштапкы $f(x)$, $g(x)$ козгоо күчтөрүн таасиринен кийинки эркин термелүүдө болот.

1 – кадам. Адегенде кыймылсыз толкундарды, б.а. коюлган маселенин $u(x, t) = X(x)T(t)$ көрүнүштөгү чыгарылышын табабыз. Болжолдонгон көрүнүштөгү чыгарылышты (58) маселесиндеги (ЖТДТ) га коюп, ар башка өзөрүлмөлөрдөн көз каранды болгон

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

катыштарын тең болорун көрөбүз. Мындай теңдештик катыштар турактуу мааниге ээ болгондо гана аткарылат. Ошондуктан катыштар $(-\lambda)$ турактуу санына барабар деп, ар бирин ага теңдештирип жазгандан кийин, (ЖТДТ) ны өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган

$$\begin{aligned} T'' + \lambda \alpha^2 T &= 0, \\ X'' + \lambda X &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

эки кадимки дифференциалдык теңдемелерге келтирүүгө болот. Бул теңдемелерге коюлган (ЧШ) ларды текшерели, анда

$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ шартынан $T(t) \neq 0$ болгондуктан $X(0) = 0$ болору, $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$ шартынан $X(L) = 0$ болору келип чыгат. Демек, (59) теңдемелер системасын экинчи кадимки дифференциалдык теңдемесине коюлган

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & \text{(КДТ)} \\ X(0) = 0, X(L) = 0 & \text{(ЧШ)} \end{cases} \quad (60)$$

чек ара маселесин λ – параметрин кандай маанисинде нөлдүк эмес чыгарылышы жашайт деген маселеге жооп издейбиз. Мындай шартта табылган λ – параметрин (60) маселесин – *өздүк мааниси*, ал эми ага туура келген нөлдүк эмес чыгарылышты – *өздүк функциясы* деп атайбыз. Ушундай шарттарда түзүлгөн (60) маселесин өзү Штурм – Лиувилдин маселеси деген атты алган.

2 – кадам. (60) маселенин өздүк маанисин жана функциясын табуу төмөндөгүдөй үч учурга бөлүнөт:

1. $\lambda < 0$ болгондо (60) дагы (КДТ) нын жалпы чыгарылышы

$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$ көрүнүштө болот. Табылган чыгарылышка (59) дагы (ЧШ) га баш ийүү шартын койгондо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} = 0 \end{cases}$$

келип чыгып, теңдемелер системасын аныктагычы

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}L} & e^{\sqrt{-\lambda}L} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}L} - e^{\sqrt{-\lambda}L} \neq 0$ болгондуктан, жалгыз гана нөлдүк $C_1 = 0, C_2 = 0$ чечимдерине ээ болот. Анда бул учурда (60) маселе $X(x) = 0$ тривиалдык (нөлдүк) чыгарылышка ээ болот же нөлдүк эмес чыгарылышы жашабайт.

2. $\lambda = 0$ болгондо (КДТ) $X(x) = C_1 x + C_2$ жалпы чыгарылышына ээ болуп, (ЧШ) ны койгондо

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 L + C_2 = 0 \end{cases}$$

теңдемелер системасын алабыз. Мындан $C_1 = 0, C_2 = 0$ чечимдери табылып, (60) маселенин тривиалдык $X(x) = 0$ чыгарылыш болору келип чыгат.

3. $\lambda > 0$ болгондо (КДТ) нын жалпы чыгарылышы

$$X(x) = C_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} x$$

көрүнүштө табылып, (ЧШ) ны койгондо

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda} L + C_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} L = 0 \end{cases} \quad (61)$$

теңдемелер системасы келип чыгат. Системанын аныктагычы

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} L & \sin \sqrt{\lambda} L \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda} L$ саны болуп, ал нөл болсо гана бир тектүү система чексиз көп нөлдүк эмес чечимдерге ээ болот. Демек,

$\sin \sqrt{\lambda} L = 0$ аткарыла тургандай шартты камсыз кылган λ сандарын издейбиз. Анда $\sqrt{\lambda} L = \pi k$ болушу керек. Мында $\forall k \in Z$ – бүтүн сандар. Ошентип $\lambda = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$ болгондо гана Штурм – Лиувилдин (60) маселеси тривиалдык эмес чыгарылышка ээ болот же болбосо

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

сандары (60) маселесине өздүк маанилер болушат.

(61) системасын биринчисинен $C_1 = 0$ келип чыккандыктан турактуу $C_2 = 1$ болгон учурду гана тандап, (60) маселесин турактуу чоңдуктарга чейинки тактыктагы өздүк функцияларын

$$X_k = \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

көрүнүштөрдө табабыз.

3 – кадам. $\lambda = \lambda_k$ болгондо (59) кадимки дифференциалдык теңдемелер системасын биринчисинин жалпы чыгарылышын

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right)$$

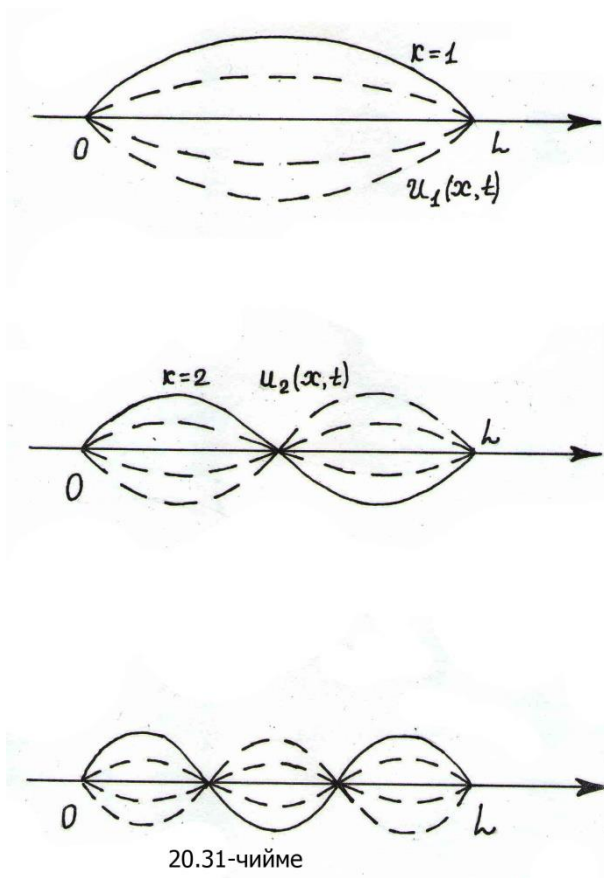
көрүнүштө жазууга болот. Мында A_k, B_k – каалагандай турактуу сандар. Бул учурда

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = \left[A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

функциялары A_k, B_k нын ар кандай маанилеринде (58) маселенин (ЖТДТ) сын жана (ЧШ) сын канааттандырышат ($k = 1, 2, 3, \dots$).

k нын ар бир маанисиндеги $u_k(x, t)$ – кылдын өздүк термелүүлөрү же элементардык термелүүлөрү деп аталышып, $\{u_k(x, t)\}$ удаалаштыгын түзүшөт. Ар бир өздүк $u_k(x, t)$ термелүүсү (ЧШ) га баш ийгендиктен, кыймылсыз токтоп турган толкунду элестетет. $k = 1$ болгондо кылдын өздүк термелүүсү негизги, эң төмөнкү үн берсе, k чоңойгон сайын жогорку үндөрдү бере баштайт. Кыймылсыз толкун сыяктуу көрүнгөн $u_k(x, t)$ өздүк термелүүсүн

$u_k(x, t) = H_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t + \alpha_k\right)$ көрүнүштө жазып, кылдын чекиттери $H_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$ – амплитудасы, $\omega_k = \frac{\pi k \alpha}{L}$ – жыштыгы, α_k – фазасы болгон



гармоникалык термелүүдө болушат деп элестетүүгө болот. Ар бир кыймылсыз толкунда бардык чекиттер бирдей жыштык менен термелишип, 20.31 – чиймеде көрсөтүлгөн формадагы толкундар сыяктуу сүрөттөлүшөт.

(58) деги (ЖТДТ) нын бир тектүүлүгү жана сызыктуулугунан $u_k(x, t)$ функцияларын чектүү суммасы, кала берсе $u(x, t)$ функциясына бир калыпта жыйналган, x жана t өзгөрүлмөлөрү боюнча экинчи тартиптеги туундуларын мүчөлөп эсептөөгө мүмкүн болгон

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \quad (62)$$

катарынын да, (58) ге чыгарылыш болору келип чыгат. (62) катарын ар бир кошулуучусу (58) деги (ЧШ) ны канааттандырышкандыктан, анын суммасы болгон $u(x, t)$ функциясы да (ЧШ) га баш ийет. Ошондуктан (58) маселесин (БШ) шарттарын аткарылышын камсыз кыла тургандай, (62) деги A_k, B_k коэффициенттерин аныктоо маселесине өтөбүз.

2 – кадам. Болжолдуу чечим деп алынган (62) функциясын t өзгөрүлмөсүнө карата дифференцирлесек, анда

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k \alpha}{L} \cdot \left[-A_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \quad (63)$$

келип чыгып, (62) жана (63) төргө $t = 0$ маанисин койсок, (58) деги (БШ) дан

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k \alpha}{L} \cdot B_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \quad (64)$$

туюнтмалары келип чыгып, алар $(0, L)$ аралыгындагы $f(x)$ менен $g(x)$ функцияларын синустар боюнча Фурьенин катарына ажыралыштары болорун байкайбыз. Ал эми Фурьенин (64) катарын коэффициенттери

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k \alpha} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (65)$$

формулалары менен аныкталары белгилүү.

Ошентип, эгерде (ЧШ), (БШ) шарттарында берилген функциялар:

1. $f(x) \in C^3[0, L]$ болгондо $f(0) = f(L) = 0, f''(0) = f''(L) = 0$;
2. $g(x) \in C^2[0, L]$ болгондо $g(0) = g(L) = 0$

шарттарына баш ийишсе, анда (62) катарын суммасы болгон $u(x, t)$ функциясы $C^2(0 < x < L, t > 0)$ областында же мейкиндигинде (58) маселеге чыгарылыш болорун далилдеген болобуз. Мында A_k, B_k коэффициенттери (65) формулалар менен аныкталышат.

Мисал. Убакыттын баштапкы $t = 0$ ирмеминде $hx(L - x)$ параболасын абалында туруп баштапкы ылдамдыкка ээ болгон, учтары кыймылсыз бекитилген, узундугу L болгон бир тектүү кылдын эркин термелүү мыйзамын тапкыла.

► Берилген маселенин математикалык моделин

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = hx(L - x), \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

көрүнүштө түзүүгө болот.

Фурьенин өзгөрүлмөлөрдүү ажыратуу ыкмасын колдонуп, (ЖТДТ) нын (ЧШ) га баш ийген тривиалдык эмес (нөл эмес) чыгарылышын

$u(x, t) = X(x)T(t)$ көрүнүштө издейбиз. Аны (ЖТДТ) га коюп, (59) сыяктуу өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган эки кадимки дифференциалдык теңдемелер системасын алабыз. Чыгарылышка коюлган (ЧШ) га таянып, (60) көрүнүштөгү Штурм – Лиувилдин маселесин

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad X_k = \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

өздүк маанилерин жана өздүк функцияларын табабыз. $\lambda = \lambda_k$ болгондо (59) кадимки дифференциалдык теңдемелер системанын биринчисинин

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L}t\right)$$

чыгарылышын таап, берилген мисалдагы маселенин чыгарылышын

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L}t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

катарын суммасы көрүнүшүндө жазабыз. (БШ) ны эске алып

$$u(x, 0) = hx(L - x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right),$$

$$u_t(x, 0) = 0 = \frac{\pi \alpha}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot B_k \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \Leftrightarrow B_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$B_k = 0$ болоруна ишенип, (65) формуласынан A_k коэффициенттерин аныктайбыз:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L hx(L - x) \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx$$

интегралын эки жолу бөлүктөп интегралдагандан кийин

так коэффициенттер $A_{2n+1} = \frac{8L^2h}{\pi^3(2n+1)^3}$, жуп коэффициенттер

$A_{2n+2} = 0$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) болору келип чыгат.

Коэффициенттердин табылган маанилерин катардын суммасы катарында табылган чыгарылышка коюп,

$$u(x, t) = \frac{8L^2 h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)\pi\alpha}{L}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{L}x\right)$$

мисалдагы маселенин жалпы чыгарылышын табабыз. ◀

20.3.6 Учтары катырылган кылдын аргасыз термелүүсү

Учтары катырылган L узундуктагы бир тектүү кылга, узундук бирдигине эсептелип аракеттенген сырткы $F(x, t)$ күчүн таасири тийген мезгилде келип чыккан аргасыз термелүүнү карайлы. Математикалык тилде мындай термелүүнү

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (66)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

маселеси катарында жазууга болот.

Берилген (66) маселенин чыгарылышын

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t) \quad (67)$$

көрүнүштө издейбиз. Мында $v(x, t)$ деп бир тектүү эмес

$$(ЖТДТ) \quad v_{tt} = \alpha^2 v_{xx} + F(x, t)$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (68)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} v(x, 0) = 0, \\ v_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

маселенин чыгарылышын, ал эми $\omega(x, t)$ деп бир тектүү

$$(ЖТДТ) \quad \omega_{tt} = \alpha^2 \omega_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} \omega(0, t) = 0, \\ \omega(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (69)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} \omega(x, 0) = f(x), \\ \omega_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

маселесин чыгарылышы алынат.

$v(x, t)$ чыгарылышы кылдын аргасыз термелүүсүн, б.а. кыл баштапкы козголууда болбосо да сырткы $F(x, t)$ күчүн аракетин менен термелүүсүн, ал эми $\omega(x, t)$ чыгарылышы кылдын эркин термелүүсүн, б.а. баштапкы $f(x), g(x)$ козгоочуларынан кийинки уланган эркин термелүүнү мүнөздөшөт.

(69) маселесиндеги эркин $\omega(x, t)$ термелүүсү жогорудагы 20.3.5 – темасында баяндалгандыктан, (68) маселесиндеги аргасыз термелүүнү мүнөздөгөн $v(x, t)$ чыгарылышын табууга токтолобуз.

Ал үчүн бир тектүү эмес жекече туундулуу сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда негизги ыкмалардын бири болгон, өздүк функциялар боюнча ажыратуу ыкмасын пайдаланабыз. Бул ыкманын негизги идеясы – сырткы $F(x, t)$ күчтүн, тиешелүү бир тектүү (ЧШ) нын $X_k(x)$ – өздүк функциялары боюнча

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \cdot X_k(x)$$

көрүнүштөгү катарга ажыратуу жана сырткы козгоо күчтүн ар бир $F_k(t)$, $X_k(x)$ компоненттерин аракетине жараша, аларга жооп берген $u_k(x, t)$ чыгарылыштарын системасын табуу болуп эсептелет. Табылган $u_k(x, t)$ чыгарылыштарын суммалоо менен берилген маселенин чыгарылышы

$$\text{тургузулат } u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t).$$

(68) маселесин $v(x, t)$ чыгарылышын

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \quad (70)$$

көрүнүштө издейбиз. Мында

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

бир тектүү (ЧШ) га баш ийген өздүк функциялар.

$T_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) функцияларын, $v(x, t)$ функциясы (68) деги (ЖТДТ) ны, (БШ) ны канааттандыра тургандай шарттарга таянып аныктайбыз. $v(x, t)$ функциясын (70) көрүнүштө деп ойлоп, (68) деги (ЖТДТ) ге койсок,

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \right\}_t'' = \alpha^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \right\}_x'' + F(x, t) \quad \text{же}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} T_k(t) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = F(x, t) \quad (71)$$

теңдештиги келип чыгат.

$F(x, t)$ функциясын $(0, L)$ кесиндисинде синустар (өздүк функциялар) боюнча Фурьенин

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right), \quad \text{мында} \quad F_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(\xi, t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L}\xi\right) d\xi \quad (72)$$

катарына ажыратып, ажыралышты (71) теңдештигине коюп, (71) теңдештигин ар бир k кошулуучуларына карата теңдештиргенден кийин

$$T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} T_k(t) = F_k(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (73)$$

$T_k(t)$ – белгисиз функцияларына карата кадимки дифференциалдык теңдемелерине ээ болобуз.

(70) катарын суммасы катары аныкталган $v(x, t)$ чыгарылышы (68) деги нөлдүк (БШ) ны канааттандырышы үчүн, $T_k(t)$ функцияларына

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (74)$$

шарттарын коюу жетиштүү. Чынында эле, (70) ке, жана анын $v_t(x, t)$ туундусуна $t = 0$ маанисин койсок $\forall k$:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \stackrel{(74)}{=} 0,$$

$$v_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \stackrel{(74)}{=} 0,$$

(БШ) нын аткарылгандыгын көрөбүз.

(73) теңдемелерине (74) шарттарды эске алуу менен турактууну вариациялоо ыкмасын колдонуп, (73) теңдемелерин

$$T_k(t) = \frac{1}{\pi k \alpha} \int_0^t F_k(\tau) \cdot \sin\left[\frac{k\pi\alpha}{L}(x - \tau)\right] d\tau \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (75)$$

көрүнүштөгү чыгарылыштарын табабыз. Мында $F_k(t)$ – функциялары (72) формулалары менен аныкталышат.

Ошентип, (70) катары жана аны x, t өзгөрүлмөлөрү боюча экинчи тартипке чейин мүчөлөп дифференцирлегенден кийинки катарлар бир калыпта жыйналуучу болушса, анда (75) көрүнүштө табылган $T_k(t)$ – маанилерин (70) катарына коюп, (70) катарын суммасы катарында аныкталган $v(x, t)$ функциясын, (68) маселесин чыгарылышы катарында кабыл алууга болот.

Чынында эле, эгерде $F(x, t)$ – функциясы x өзгөрүлмөсү боюнча экинчи тартипке чейинки туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функция болсо, ал эми t өзгөрүлмөсүн бардык маанилеринде

$F(0, t) = F(L, t) = 0$ шарттары аткарылса, анда (70) катарын бир калыпта жыйналуучулугуна ишенүүгө болот.

Ушундай шарттар аткарылган учурда (67) ни эске алып, башында берилген (66) маселесин чыгарылышын

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k \alpha}{L} t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мында (65) формуласын негизинде

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k \alpha} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

көрүнүштөрдө табылышат.

Мисал.

(ЖТДТ) $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + t \sin x, t > 0, 0 < x < \pi$

(ЧШ) $\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (76)$

(БШ) $\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi$

аралаш маселесин чыгаралы.

► Термелүүнү козгоочу баштапкы күчтөр катышпагандыктан, берилген маселеде учтары катырылып, узундугу π болгон бир тектүү кылдын аргасыз термелүүсү каралат. $[0, \pi]$ аралыгында кадимки

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & \text{(КДТ)} \\ X(0) = 0, X(L) = 0 & \text{(ЧШ)} \end{cases}$$

дифференциалдык теңдемесине коюлган (ЧШ) маселесине, ушул аралыкта ортогоналдык $\{\sin(nx)\}$ функциялардын системасы – өздүк функциялардын системасын түзүшөт ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Демек, (76) маселесин чыгарылышын

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(nx) \quad (77)$$

көрүнүштө издөөгө болот. Мында $T_n(t)$ – белгисиз функция.

(76) маселесиндеги (ЖТДТ) га (77) көрүнүштөгү чыгарылышты коюп,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + n^2 T_n(t)] \cdot \sin(nx) = t \sin x$$

теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештиктеги ар бир n кошулуучуларды теңдештирип,

$$\begin{aligned} T_1''(t) + 1^2 \cdot T_1(t) &= t, \\ T_n''(t) + n^2 T_n(t) &= 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (78)$$

теңдемелерин алабыз. (77) ге коюлган (БШ) нын негизинде алынган

$$u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(nx), \quad u_t(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin(nx)$$

шарттарынан келип чыккан $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) баштапкы шарттарына баш ийген (78) кадимки дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарын табалы. $T_1(t)$ – белгисиз функциясы үчүн түзүлгөн

$T_1''(t) + T_1(t) = t$ теңдемесин жалпы $T_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t$ чыгарылышын таап, баштапкы $T_1(0) = T_1'(0) = 0$ шарттарынан

$C_1 = 0$, $C_2 = -1$ турактууларын аныктаган соң, баштапкы шартка баш ийген $T_1(t) = t - \sin t$ чыгарылышын табабыз. Ал эми $n \geq 2$ болгон учурда,

$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0$, маселесин $T_n(t) = 0$ чыгарылышына ($n = 2, 3, \dots$) ээ $T_n(0) = T_n'(0) = 0$

болот. Анда мисалда коюлган маселенин чыгарылышы

$$u(x, t) = (t - \sin t) \cdot \sin x$$

көрүнүштө табылат. ◀

20.3.7 Толкундун теңдемесине Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонуу ыкмасы

Толкундун теңдемесине коюлган

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = \varphi(t), \\ u(L, t) = \psi(t), \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (79)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

аралаш маселесин карайлы.

$u(x, t)$ функциясын жана анын u_x, u_{xx} жекече туундуларын t өзгөрүлмөсүнөн гана көз каранды функцияларга окшотуп, аларга t өзгөрүлмөсүнө карата $(0, +\infty)$ аралыгында Лапластын өзгөртүп түзүүсүн жүргүзөбүз. Лапластын чагылтуусун

$$U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \quad (u(x, t) \sim U(x, p))$$

$u(x, t)$ – оригинал, $U(x, p)$ – Лаплас элеси

эрежесине таянып, төмөндөгү жекече туундулардын

$$u_x \sim \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU(x, p)}{dx} = U_x,$$

$$u_{xx} \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} = U_{xx},$$

$$u_t(x, t) \sim p U - u(x, 0),$$

$$u_{tt}(x, t) \sim p^2 U - p u(x, 0) - u_t(x, 0) = p^2 U - p f(x) - g(x)$$

Лаплас – элестерин аныктайбыз. Табылган элестерди жана (БШ), (ЧШ) ларды эске алып, (79) маселенин Лаплас боюнча элесине, б.а. бир эле x өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон кадимки дифференциалдык теңдемеге коюлган

$$\begin{aligned} \text{(КДТ)} \quad U_{xx} - \frac{p^2}{\alpha^2} U &= -\frac{p}{\alpha^2} f(x) - \frac{1}{\alpha^2} g(x), \\ \text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} U(0, p) = \Phi(p), \\ U(L, p) = \Psi(p) \end{cases} & \end{aligned} \quad (80)$$

маселеге ээ болобуз. Мында p турактуу параметр катарында катышып, $\Phi(p), \Psi(p)$ функциялары деп $\varphi(t)$ менен $\psi(t)$ экөөсүнүн Лаплас – элестери белгиленди.

Айталы, $U(x, p)$ функциясы (80) маселенин чыгарылышы болсун, анда анын Лаплас – оригиналы болгон $u(x, t)$ функциясы берилген (79) аралаш маселесине чыгарылыш болот.

Мисал.

Узундугу L болгон бир тектүү кылдын учку $x = 0$, $x = L$ чекиттери катырылып, кылдын баштапкы четтөөсү (козголуусу)

$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{L}$, $A - const.$ формуласы менен берилген. Ал эми баштапкы ылдамдыгы жок. Кылдын убакыттын ар бир $t > 0$ ирремдериндеги $u(x, t)$ – козголууларын аныктагыла.

► Берилген маселени математикалык тилде

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < \infty, \quad (81)$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{L}, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq L$$

аралаш маселеси катарында жазууга болот.

t өзгөрүлмөсү боюнча Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонсок, анда (80) ге окшотуп (БШ) ны сактоо менен, (81) маселесин Лаплас – элесин кадимки дифференциалдык теңдемеге коюлган

$$(КДТ) \quad U_{xx} - \frac{p^2}{\alpha^2} U = -\frac{Ap}{\alpha^2} \sin \frac{\pi x}{L},$$
$$(ЧШ) \quad \begin{cases} U(0, p) = \int_0^{+\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} 0 \cdot e^{-pt} dt = 0, \\ U(L, p) = \int_0^{+\infty} u(L, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} 0 \cdot e^{-pt} dt = 0 \end{cases} \quad (82)$$

көрүнүштөгү маселеге өзгөртүп түзөбүз.

(82) деги турактуу коэффициенттүү сызыктуу (КДТ) нын чыгарылышын

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{px}{\alpha}} + C_2 e^{-\frac{px}{\alpha}} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2}} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

таап, (ЧШ) дан $C_1 = C_2 = 0$ коэффициенттерин аныктаган соң, (82) нин чыгарылышы

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{\alpha^2 \pi^2}{L^2}} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \text{ көрүнүштө болоруна ишенебиз. Лапластын}$$

тескери өзгөртүп түзүүсүн колдонуп, оригинал (81) теңдеменин чыгарылышын

$$u(x, t) = A \sin \frac{\pi \alpha t}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \text{ табабыз. } \blacktriangleleft$$

20.3.8 Көп өлчөмдүү мейкиндиктердеги толкундун теңдемелери

Жогоруда баштапкы шарты берилген бир өлчөмдүү толкундун теңдемелери аркылуу чексиз (чектүү) узундуктагы кылдын термелүү маселелерин карап, аларды Даламбердин, Фурьенин ыкмалары менен чыгаруу жолдорун үйрөндүк. Көп өлчөмдүү мейкиндиктерде бир өлчөмдүү толкундарды *жалпак толкундар* катары сүрөттөөгө болот. Мисалы, термелүү аракеттерине күч берген булактардан жетишерлик алыс аралыктардагы үн же электромагниттик толкундарды – *жалпак толкундар* катары эсептеп, бир өлчөмдүү толкундун теңдемелери менен сүрөттөөгө болот. Математикада толкундарды өлчөмдөрүнө жараша төмөндөгүдөй терминдер:

- 1) Бир өлчөмдүү толкундарды – *жалпак толкундар*,
- 2) Эки өлчөмдүү толкундарды – *цилиндрдик толкундар*,
- 3) Үч өлчөмдүү толкундарды – *сфералык толкундар*

менен атоо кабыл алынган.

Ошентип, жогоруда каралган бир өлчөмдүү толкундун теңдемелери, көп өлчөмдүү мейкиндикте же жалпак толкунду, же болбосо кылдын термелүүсүн сүрөттөйт.

Цилиндрдик толкундарга мисал катары бир маселе карайлы.

Үч өзгөрүлмөлүү $u(x, y, t)$ функциясы менен сүрөттөлүүчү цилиндрдик толкундарга мисал катары, R^2 – эки өлчөмдүү мейкиндигинде борбору O координата башталмасында, радиусу $-r_0$ болгон бир тектүү тегерек мембрананын баштапкы козгоочу күчтүн

таасири астында уланган эркин термелүүсүнө байланышкан маселени карайлы.

Мембрананын термелүү теңдемеси

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

көрүнүштө болот. Жаңы полярдык $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ координаталарга өтсөк, мембрананын $(x; y)$ координаталуу чекити, $(r; \varphi)$ координаталуу чекитке айланып, убакыттын t ирмеминдеги чекиттин абалы $u(r, \varphi, t)$ функциясын мааниси менен мүнөздөлөт. Татаал функциядан туунду алуу эрежесине таянып, тиешелүү

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi,$$

$$u_\varphi = u_x x_\varphi + u_y y_\varphi = -u_x r \sin \varphi + u_y r \cos \varphi,$$

$$u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \varphi + u_{yy} \sin^2 \varphi,$$

$$u_{\varphi\varphi} = u_{xx} r^2 \sin^2 \varphi + u_{yy} r^2 \cos^2 \varphi - u_x r \cos \varphi - u_y r \sin \varphi$$

туундуларды эсептеген соң, акыркы экөөсүн төмөндөгүдөй ыкма менен кошуп жиберип

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = (u_{xx} + u_{yy})(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \frac{1}{r} (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi),$$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r \quad \text{теңдештигине ээ болобуз.}$$

Демек, полярдык координаталардагы мембрананын термелүүсүн

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} u_r \right) \quad (83)$$

теңдемеси менен сүрөттөп, ага

$$(ЧШ) \quad u(r_0, \varphi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \\ u_t(r, \varphi, 0) = F(r, \varphi) \end{cases} \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

көрүнүштө маселе коюууга болот.

Мембрананын чети катырылган жана мембрана окторго карата симметриялуу термелет деп эсептелген жекече учурду карасак, анда мембрананын $(r; \varphi)$ чекитиндеги козголуу абалы φ бурчунан көз каранды болбой калат, б.а. $u(r, \varphi, t) = u(r, t)$. Ошондуктан (83) теңдемесине коюлган маселени каралган учурга ылайыктап,

$$(ЖТДТ) \quad u_{tt} = \alpha^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad (84)$$

$$(ЧШ) \quad u(r_0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(БШ) \quad \begin{cases} u(r, 0) = f(r), \\ u_t(r, 0) = F(r), \end{cases} \quad 0 \leq r \leq r_0$$

көрүнүшкө өзгөртүп көчүрсө болот.

Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыкмасына таянып, (84) теңдемесин (БШ) га баш ийген чыгарылышын

$$u(r, t) = T(t)R(r)$$

көрүнүштө издейбиз. Болжолгон чыгарылышты (84) теңдемесине коюп,

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{R''(t) + \frac{1}{r} R'(t)}{R(r)} = -\lambda \quad (\lambda > 0)$$

теңдештигин алабыз. Мындан өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган төмөндөгүдөй эки кадимки

$$T''(t) + \lambda \alpha^2 T(t) = 0, \quad (85)$$

$$\begin{cases} R''(t) + \frac{1}{r} R'(t) + \lambda R(r) = 0, & (КДТ) \\ R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < +\infty & (ЧШ) \end{cases} \quad (86)$$

дифференциалдык теңдемелер келип чыгат. Мындагы $|R(0)| < +\infty$ шарты, мембрананын борборунда термелүү чектен чыгып кетпейт деген маанини билдирет.

(86) маселе тривиалдык $R(r) \equiv 0$ чыгарылышына ээ болгондуктан, өзүбүзгө керектүү тривиалдык эмес чыгарылышты табуу максатында (86) дагы (КДТ) ны r^2 ка ($r \neq 0$) көбөйтүп, $\nu = 0$ болгон учурдагы Бесселдин теңдемеси

$$r^2 R''(t) + r R'(t) + (\lambda r^2 - 0) R(r) = 0$$

көрүнүштө жазып, анын жалпы чыгарылышын

$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 \mathcal{N}_0(\sqrt{\lambda}r)$ табабыз. Мында J_0 – Бесселдин, \mathcal{N}_0 – Неймандын функциялары болушуп, (ЧШ) да коюлган

$|R(0)| < +\infty \Rightarrow \mathcal{N}_0(\sqrt{\lambda}r) \underset{r \rightarrow +0}{\rightarrow} \infty$ шартынан $C_2 = 0$ болору келип

чыгат. Ал эми (ЧШ) дагы $R(r_0) = 0$ ден, жалпы учурда $C_1 \neq 0$ болгондуктан $J_0(\sqrt{\lambda}r_0) = 0$ келип чыгат. Мындан $\mu_k = \sqrt{\lambda}r_0$ санын Бесселдин J_0 – функциясын нөлдөрүнүн бири болушу керектигин көрөбүз. Бесселдин функциясы чексиз көп, оң

$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$ нөлдөргө ээ болгондуктан, (86) маселесин

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

өздүк маанилерин жана аларга туура келген

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

өздүк функцияларын табабыз.

Өздүк $\lambda = \lambda_n$ маанилерге туура келген (85) теңдемесин жалпы чыгарылышын

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right)$$

көрүнүштө болуп,

$$u_n(r, t) = \left[A_n \cos\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right) \right] J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

функциялары (84) теңдемесине коюлган (ЧШ) ны канааттандырган чыгарылыштар болушат. Алардын ар бири, тегерек мембрананын окторго карата симметриялуу жайгашкан кыймылсыз толкундар сыяктуу абалдарын сүрөттөшөт.

(84) теңдемесине коюлган маселенин жалпы чыгарылышын

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha\mu_n}{r_0}t\right) \right] J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) \quad (87)$$

катарын суммасы катарында жазууга болот. Мындагы A_n, B_n коэффициенттери (84) төгү (БШ) дан аныкталышат, б.а. (87) ге жана анын t боюнча жекече туундусуна $t = 0$ маанисин коюп,

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right),$$

$$u_t(r, 0) = F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \mu_n}{r_0} \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right)$$

тендештиктерине ээ болобуз.

Бесселдин $J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right)$ функциялары $[0, r_0]$ аралыгында n дин ар башка $J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right), J_0\left(\frac{\mu_m}{r_0} r\right)$ ($n \neq m$) маанилеринде r өзгөрүлмөсүнө карата ортогоналдуу болушкандыктан, $f(r), F(r) \in C^2(0, r_0)$ функцияларын Бесселдин функциялары боюнча бир калыпта жыйналуучу

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right),$$

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right)$$

Фурье – Бесселдин катарына ажырата алабыз. Бул ажыралыштардан коэффициенттер

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr}$$

$$B_n = \frac{r_0}{\alpha \mu_n} \cdot \frac{\int_0^{r_0} r F(r) \cdot J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right) dr}$$

көрүнүштөрдө табылышат.

Ошентип, эгерде (87) катары жана анын x, t өзгөрүлмөлөрү боюнча экинчи тартипке чейинки мүчөлөп дифференцирлегенден кийинки катарлар бир калыпта жыйналуучу болушса, анда табылган A_n, B_n коэффициенттерин (87) ге коюп, (84) тендемесине коюлган маселенин жалпы чыгарылышын аныктайбыз .

20.3.9 Биринчи тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер системасы

Көптөгөн физикалык процесстер жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасы менен моделдештирилет. Мисалы, *Эйлердин теңдемелери* деп аталышкан биринчи тартиптеги

$$\begin{cases} u_t + uv_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x = 0 - Ox \text{ ти бойлогон импульстун сакталышы,} \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y = 0 - Oy \text{ ти бойлогон импульстун сакталышы,} \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 - \text{массанын сакталуусу,} \\ \left(\frac{p}{\rho v}\right)_t + u \left(\frac{p}{\rho v}\right)_x + v \left(\frac{p}{\rho v}\right)_y = 0 - \text{энергиянын сакталуусу} \end{cases}$$

сызыктуу эмес төрт ЖТДТ лердин системасы, суюктуктардын кыймыл динамикасын математикалык модели болуп эсептелет. Мында белгисиз функциялар суюктуктун $(x; y; z)$ чекитиндеги

$u(x, y, z, t)$ — ылдамдыктын x — компонентин;

$v(x, y, z, t)$ — ылдамдыктын y — компонентин;

$p(x, y, z, t)$ — суюктуктагы басымды;

$\rho(x, y, z, t)$ — суюктуктун тыгыздыгын көрсөтүүчү чоңдуктар болушат.

Экинчи жактан, кадимки дифференциалдык теңдемелер теориясында бир жогорку тартиптеги теңдемени, биринчи тартиптеги теңдемелердин системасына келтирип чыгаруу ыкмаларын караганбыз. ЖТДТ лер теориясында да айрым кыйынчылыктар болгонуна карабастан, бир жогорку тартиптеги жекече туундулуу теңдемени, биринчи тартиптеги ЖТДТ лердин системасына келтирип чыгаруу зарылчылыгы келип чыгат. Мисал катары *телеграфтын теңдемеси* деп аталган толкундун

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + au_t + b u$$

теңдемесин жаңы үч

$$u_1 = u, u_2 = u_x, u_3 = u_t$$

өзгөрүлмөлөрдү киргизүү менен, биринчи тартиптеги

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = c^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + au_3 + bu_1 \end{cases} \quad (88)$$

ЖТДТ лердин системасы катарында жазууга болот.

(88) сыяктуу теңдемелер системасын чыгаруу үчүн, матрицанын *өздүк маанилери* жана *өздүк векторлору* жөнүндөгү аныктамаларды кайра эске түшүрөбүз:

1. Эгерде A матрицасы n – тартиптеги квадраттык матрица болсо, анда анын $\det(A - \lambda I) = 0$ мүнөздүк теңдемесин n сандагы λ_n – чечимдери, **өздүк маанилер** деп аталышат. Айрым өздүк маанилер дал келип калышы да мүмкүн. I деп, квадраттык n – тартиптеги бирдик матрица белгиленген.

2. Эгерде λ саны A матрицасын өздүк мааниси болсо, анда

$$AX = \lambda X$$

теңдешигин канааттандырган ар бир нөлдүк эмес X – векторун, A матрицасынын **өздүк вектору** деп атайбыз.

Мисал.

$$(ЖТДТ) \begin{cases} (1) \frac{\partial u_1}{\partial t} + 8 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ (2) \frac{\partial u_2}{\partial t} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \quad (89)$$

$$(БШ) \begin{cases} (1) u_1(x, 0) = f(x), \\ (2) u_2(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty$$

теңдемелер системасына коюлган Кошинин маселесин чыгаралы.

Каралуучу маселе, убакыттын баштапкы ирмемдеринде берилгендерге таянып, бир өлчөмдүү мейкиндиктин x чекитиндеги кийинки t ирмемдериндеги $u_1(x, t)$ – басымды жана $u_2(x, t)$ – тыгыздыкты аныктоо маселесине математикалык модел болот.

► Теңдемелер системасын матрицалык

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ көрүнүштө же}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{белгилөөлөрүн}$$

пайдаланып, матрица теңдеме

$$u_t + A \cdot u_x = 0 \quad (89^A)$$

көрүнүштө жазууга болот.

А матрицасын өздүк векторлорун таап, мамычаларында ушул өздүк векторлор турган P жардамчы матрицасын түзүп,

$u = Pv$ өзгөртүп түзүүсүн жардамы менен, жаңы

$v = \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix}$ – белгисиз функциясын киргизели. P матрицасы

белгилүү болгондуктан мындай өзгөртүп түзүүдөн кийин, v ны эки v_1, v_2 белгисиздерине карата түзүлгөн жөнөкөй теңдемелер системасын чечими катарында аныктай алабыз.

Кийинки кадамда, табылган v_1, v_2 лер аркылуу $u = Pv$ тиешелештигин пайдаланып, изделген $u_1(x, t), u_2(x, t)$ функцияларын табуу ыкмасын ишке ашырабыз. Ал үчүн $u = Pv$ теңдештигин x, t өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирлегенден кийин

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = P \frac{\partial v}{\partial t} &\Leftrightarrow u_t = P v_t, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = P \frac{\partial v}{\partial x} &\Leftrightarrow u_x = P v_x, \end{aligned} \quad (90)$$

келип чыккан (90) туюнтуусун (89^A) га коюп,

$$u_t + A \cdot u_x = 0 \Leftrightarrow P \cdot v_t + A \cdot P v_x = 0$$

теңдемесине ээ болобуз. Акыркыны сол жагынан P^{-1} тескери матрицасына көбөйтүп, $P^{-1} \cdot P = I$ – бирдик матрица болгондуктан (89) теңдемени

$$P^{-1} \cdot P \cdot v_t + P^{-1} \cdot A \cdot P v_x = 0 \Leftrightarrow v_t + P^{-1} \cdot A \cdot P v_x = 0$$

көрүнүшкө өзгөртүүгө болот. Белгилүү болгон матрицаларды көбөйтүп, натыйжасын

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = B \text{ матрицасы деп белгилесек, анда}$$

$$v_t + B \cdot v_x = 0 \quad (91)$$

же ачып жазганда

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + 4 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, \\ 2) \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - 4 \frac{\partial v_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (91^A)$$

бири – бири менен байланышпаган теңдемелер келип чыгып, алардын бири – биринен көз каранды эмес чечимдерин

$$v_1 = \varphi(x - 4t), \quad v_2 = \psi(x + 4t)$$

көрүнүштөрдө табабыз. Мында φ жана ψ эркин алынган дифференцирленүүчү функциялар.

Ошентип v_1, v_2 функцияларын таба алдык, ал эми коюлган (89) маселенин жалпы чыгарылышы болгон u векторун табуу үчүн, төмөндөгү амалдарды аткарып

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} &= u = Pv = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x - 4t) \\ \psi(x + 4t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\varphi(x - 4t) - 2\psi(x + 4t) \\ \varphi(x - 4t) + \psi(x + 4t) \end{pmatrix}, \text{ келип чыккан теңдештиктен} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2\varphi(x - 4t) - 2\psi(x + 4t), \\ u_2(x, t) &= \varphi(x - 4t) + \psi(x + 4t), \end{aligned} \quad (92)$$

изделүүчү вектордун (92) компоненттерин аныктайбыз жана иш жүзүндө (89) системанын $u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ – жалпы чыгарылышын тапкан болобуз.

φ жана ψ функциялары эркин түрдө тандалгандыктан, (89) дагы (ЖТДТ) нын (92) сыяктуу чексиз көп жалпы чыгарылыштарын болору көрүнөт.

Мисалы, эркин тандалган эки

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \sin \xi, \\ \psi(\xi) = \xi^2 \end{cases}$$

функцияларын алсак, анда (92) көрүнүштө жазылган

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2 \sin(x - 4t) - 2(x + 4t)^2, \\ u_2(x, t) &= \sin(x - 4t) + (x + 4t)^2 \end{aligned}$$

функциялардын (89) га чыгарылыш болорун, текшерип көрүп ишенүүгө болот.

Табылган (92) жалпы чыгарылыштарына (89) дагы (БШ) ны коюп:

$$\begin{cases} (1) u_1(x, 0) = f(x), \\ (2) u_2(x, 0) = g(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\varphi(x) - 2\psi(x) = f(x), \\ \varphi(x) + \psi(x) = g(x), \end{cases}$$

(БШ) ны койгонго чейин эркин болушкан $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функцияларын бир гана конкреттүү

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{4}[f(x) + 2g(x)], \\ \psi(x) &= \frac{1}{4}[2g(x) - f(x)] \end{aligned}$$

маанилерин таап, аларды (92) ге коёбуз.

Жыйынтыктап айтканда, (89) маселесин чыгарылышы

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= 2\varphi(x - 4t) - 2\psi(x + 4t) = \\ &= \frac{1}{2}[f(x - 4t) + 2g(x - 4t)] - \frac{1}{2}[2g(x + 4t) - f(x + 4t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \varphi(x - 4t) + \psi(x + 4t) = \\ &= \frac{1}{4}[f(x - 4t) + 2g(x - 4t)] + \frac{1}{4}[2g(x + 4t) - f(x + 4t)] \end{aligned}$$

көрүнүштө жазылат.

7. Көнүгүүлөр

Төмөндөгү баштапкы шарт коюлган маселелердин чыгарылыштарын тапкыла:

1. $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < t$, $-\infty < x < +\infty$; $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u_t(x, 0) = \cos x$.

2. $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < t$, $-\infty < x < +\infty$; $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Бир тектүү чексиз узун кыл баштапкы козгоонун таасири менен жарым айлана $u(x, 0) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ көрүнүшкө ийилсин. Убакыттын $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$ ирмемдеринде баштапкы ылдамдыктары жок деп эсептеп, кылдын абалдарын чиймелерин сызгыла ($\alpha = 1$ деп алгыла).

Фурьенин өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасын пайдаланып, төмөндөгү аралаш маселелерди чыгаргыла:

4. $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < t$, $0 < x < L$; $u(x, 0) = u(L, t) = 0$,
 $u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{L}$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < t$, $0 < x < L$; $u(x, 0) = u(L, t) = 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L}$.

6. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < t$, $0 < x < \pi$; $u(x, 0) = u(\pi, t) = 0$,
 $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = \sin x$.

7. $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, $0 < t$, $0 < x < L$; $u(x, 0) = u(L, t) = 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{эгерде } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ L - x, & \text{эгерде } \frac{1}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$

8. $u_{tt} = u_{xx} + \sin(\pi x)$, $0 < t$, $0 < x < 1$; $u(x, 0) = u(1, t) = 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

9. $u_{tt} = u_{xx} + (4t - 8) \sin x$, $0 < t$, $0 < x < \pi$;
 $u(x, 0) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

10. $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < t$, $0 < x < L$; $u(x, 0) = 0$, $u(L, t) = t$,

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$11. \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = c^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + au_3 + bu_1 \end{cases} \quad (88)$$

теңдемелер системасын, матрицалык

$A u_t + B u_x + C u = 0$ көрүнүштө жазгыла. Мында A, B, C – үчүнчү тартиптеги матрицалар.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасын өздүк маанилерин жана өздүк векторлорун тапкыла.

$$13. \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + 4 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ теңдемелер системасын чыгаргыла.}$$

Жооптор.

$$1. u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2}] + \frac{\sin(at)}{\alpha} \cos x;$$

$$2. u(x, t) = \frac{1}{2\alpha} [\arctg(x + at) - \arctg(x - at)];$$

$$4. u(x, t) = \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi \alpha}{L} t; \quad 5. u(x, t) = \frac{1}{\pi \alpha} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi \alpha t}{L};$$

$$6. u(x, t) = (\sin t + \cos t) \sin x;$$

$$7. u(x, t) = \frac{4\alpha^2}{\alpha\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{L} x \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi\alpha}{L} t;$$

$$8. u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \pi x; \quad 9. u(x, t) = \left(2 \cos 2t - \frac{\sin 2t}{2} + t - 2 \right) \cdot \sin 2x;$$

$$10. u(x, t) = \frac{xt}{L} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi nx}{L} \sin \frac{\pi nt}{L}.$$

§20.4 Эллиптикалык теңдемелер

20.4.1 Лапласиан жана анын физикалык мааниси

Үч өлчөмдүү тик бурчтуу Декарттык координаталар системасында Лапластын оператору

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (93)$$

көрүнүштө жазылат, ал эми $u(x, y, z)$ функциясын Δu – *лапласианы* деп, (93) операторунун таасиринен кийин келип чыккан Δu чоңдугун айтабыз. Тандалган координаталар системасына жана мейкиндиктердин өлчөмдөрүнө жараша лапласиан ар башка көрүнүштөрдө жазылышат. Анткени, лапласиан мүнөздөгөн реалдуу кубулуш өзгөрбөй кала бергени менен, өзгөрүлмөлөрдү алмаштырганда кубулушка байкоо жүргүзүү чекити болгон координата башталмасы жана көрүү бурчу болгон тегиздиктеги координаттык чейректер жана мейкиндиктеги координаттык октанттар өзгөрүп турушат. Мисалы,

а) Эки өлчөмдүү R^2 мейкиндигинде:

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ – тик бурчтуу Декарт коорд. системада ,

$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$ – полярдык коорд. системада ;

б) Үч өлчөмдүү R^3 мейкиндигинде:

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ – тик бурчтуу Декарт коорд. системада ,

$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$ – цилиндрдик коорд. системада ,

$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}$ – сфера коорд. ,

көрүнүштөрдө жазылышат. Мында $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ – полярдык

координаталар, $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{cases}$ – цилиндрдик координаталар,

$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$ – сфералык координаталар болушат.

Экинчи тартиптеги үч жекече туундулардын суммасы катарында жазылып, математикалык физикада кеңири колдонулган Лапластын (93)

оператору, жаратылыш мыйзамдары менен кандай байланышта болот? - деген суроо туулат. Функциянын лапласианы, функциянын кайсы бир чекиттеги маанисин, ага коңшулаш чекиттердеги маанилери аркылуу баалоого мүмкүнчүлүк бергендиги менен Лапластын операторун практикалык баркын көтөрүп турат.

Эки өлчөмдүү лапласиандын айрым касиеттерине күбө болулу:

1. Эгерде кайсы бир $(x; y)$ чекитинде $\Delta u > 0$ болсо, анда ушул чекиттеги $u(x, y)$ мааниси, $(x; y)$ ке коңшулаш чекиттердеги маанилердин орточосуна караганда кичине болот.

Мисалы $\Delta u > 0$ десек, борбору $(x; y)$ чекити болгон айлананын (тегеректин) борборундагы функциянын $u(x, y)$ мааниси, коңшулаш чекиттер деп эсептелген айлананын (тегеректин) чекиттериндеги маанилердин орточосунан кичине болот.

2. Эгерде $(x; y)$ чекитинде $\Delta u = 0$ болсо, анда ушул чекиттеги $u(x, y)$ мааниси, $(x; y)$ ке коңшулаш чекиттердеги маанилердин орточосуна тең болот.

3. Эгерде кайсы бир $(x; y)$ чекитинде $\Delta u < 0$ болсо, анда ушул чекиттеги $u(x, y)$ мааниси, $(x; y)$ ке коңшулаш чекиттердеги маанилердин орточосуна караганда чоң болот.

Айрым мисалдарга таянып, математикалык физиканын теңдемелериндеги лапласиандын ордун көрсөтүп өтөбүз.

1. Тегиздиктин $(x; y)$ чекитиндеги u – температурасы үчүн түзүлгөн $u_t = \alpha^2 \Delta u$ жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинде, Δu – чоңдугу температуранын u_t – өзгөрүү ылдамдыгына пропорционалдуу болот. Демек $(x; y)$ чекитиндеги температура, аны курчап турган айлананын чекиттериндеги орточо температурадан төмөн болсо, анда $(x; y)$ чекитинде температура жогорулап бараткан болот.

2. $u_{tt} = \alpha^2 \Delta u$ – толкундун теңдемесине карап, мембрананын $(x; y)$ чекитиндеги ылдамдануу (же чекитке таасир берген күч), Δu – чоңдугуна пропорционалдуу болорун көрөбүз. Эгерде мембрананын бетиндеги $(x; y)$ чекитиндеги термелүүдөгү тике жогору карай

козголуу, коңшулаш чекиттердеги тике жогору карай козголуулардын орточосунан кичине болсо, анда $(x; y)$ чекити тике жогору карай ылдамдануу (же чекитке таасир берген күч, жогору карай умтулган) абалында болот.

3. Эллиптикалаык теңдемелерде белгисиз $u(x, y)$ функциясында убакыт же t – компоненти катышпагандыктан, алар мүнөздөгөн кубулуштарды стационардык кубулуштар деп аташат. Ушундай стационардык теңдемелердин негизги өкүлдөрүн бири болгон $\Delta u = 0$ теңдемеси *Лапластын теңдемеси* деп аталат. Эки өлчөмдүү мейкиндикте Лапластын теңдемеси

$$\Delta u = 0, \text{ же } \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \text{ же } u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (94)$$

көрүнүштөрдө жазылышат. Лапластын теңдемесин канааттандырган функциянын мааниси, ар дайыма *орточо мааниге* тең болот. Мисалы, керилген кыймылсыз резина мембрананын ар бир чекитиндеги козголуу, борбору ушул чекит болгон айланачанын чекиттериндеги козголуулардын орточосуна барабар.

Эгерде тегиздиктеги D областында аныкталган $u(x, y)$ функциясы, $\Delta u = 0$ Лапластын теңдемесин канааттандырса, анда $u(x, y)$ функциясы D областында гармоникалык функция деп аталып, D областында аналитикалык болгон кайсы бир комплекстик

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ функциясын чыныгы же жалган бөлүктөрүн бири болору белгилүү.

Бир өзгөрүлмөлүү $u = u(x)$ функциясына карата Лапластын теңдемеси $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0$ көрүнүштө болуп, экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме катарында $u(x) = c_1 x + c_2$ көрүнүштөгү чечимге ээ болот. Мында c_1, c_2 – эркин турактуулар.

Эллиптикалаык теңдемелерге кирген *Пуассондун теңдемеси* деп аталган $\Delta u = f$ теңдемеси да, көптөгөн кубулуштарга математикалык модел боло алат. Мында f – тандалган мейкиндик координаталарынан көз каранды болгон белгилүү функция же турактуу сан болушу да мүмкүн:

а) $\Delta u = -\rho$ теңдемеси, ρ – статикалык заряддардын тыгыздыгы болгон учурда электростатикалык талаанын потенциалын сүрөттөйт.

б) $\Delta u = -g(x, y)$ теңдемеси, $g(x, y)$ – жылуулук булагынан тараган температуранын стационардык бөлүштүрүлүшүн сүрөттөйт. Эгерде кайсы бир чекитте $g(x, y)$ оң болсо, анда бул чекитте жылуулук бөлүнүп чыгып жаткан, ал эми $g(x, y)$ терс болсо жылуулук жутулуп жаткан болот.

в) *Гельмгольцтун теңдемеси* деп аталган $\Delta u + \lambda u = 0$ эллиптикалык теңдемеси, өзгөрүлмөлөрдү убакытка жана мейкиндик координаталарына карата ажыраткандан кийинки жылуулук өткөрүмдүүлүк жана толкундун теңдемелеринде мембрананын мейкиндик бөлүгүн өздүк термелүүлөрүнүн сүрөттөйт. Мисалы, гиперболалык теңдемелерге кирген толкундун $\Delta u - \frac{1}{\alpha^2} u_{tt} = 0$ теңдемесинде өзгөрүлмөлөрдү

$u(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}$ көрүнүштө ажыратсак, анда аны

$$e^{i\omega t} \Delta v + \frac{\omega^2}{\alpha^2} v e^{i\omega t} = 0 \Leftrightarrow \Delta v + \lambda v = 0$$

көрүнүштөгү Гельмгольцтун теңдемесине келтиребиз. Мында $\lambda = \frac{\omega^2}{\alpha^2}$.

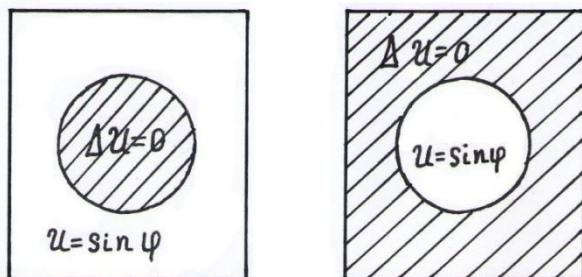
20.4.2 Чекте коюлган негизги чек ара шарттарынын үч түрү

$u(x, y)$ – белгисиз функциясын табууга карата жогоруда баяндалган эллиптикалык теңдемелер стационарлык кубулуштарды сүрөттөгөндүктөн, аларга баштапкы шарт коюлбастан x, y өзгөрүлмөлөрү өзгөргөн областтардын чегинде чек ара шарттары коюлат.

Айталы, R^2 мейкиндигиндеги тик бурчтуу декарттык координаталар системасында D областы берилип, ∂D – сызыгы (R^3 тө кабык – бет) менен чектелип турсун. Мындай учурда Лапластын (94) теңдемесине төмөндөгүдөй үч маселелердин бирөөсүн коюу мүмкүн:

1. $u|_{(x,y) \in \partial D} = f_1(p)$ – чектеги биринчи же Дрихленин маселеси,
2. $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(x,y) \in \partial D} = f_2(p)$ – чектеги экинчи же Неймандын маселеси,
3. $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)|_{(x,y) \in \partial D} = f_3(p)$ – чектеги үчүнчү маселе.

Мында $p \in \partial D$ жана h, f_1, f_2, f_3 – белгилүү функциялар, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – туундусу ∂D чегине түшүрүлгөн сырткы нормалдын багыты боюнча алынган.



20.32-чийме

Полярдык координаталарда жазылган Лапластын (94) теңдемесине чектик маселелерди коюу мисалдарына токтололу.

1. Чектеги I – түрдөгү маселе же Дрихленин маселеси
ички жана сырткы маселелер

деп экиге бөлүнүшөт. Ички маселеде тегеректин ички чекиттеринде $\Delta u = 0$ болсо, сырткы маселеде тегеректин сырткы чекиттеринде

$\Delta u = 0$ болуп, экөөсүндө тең чектеги чек ара шарты тегеректи курчап турган айлананын чекиттеринде берилет (20.32 – чийме):

$$(ЖТДТ) \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < 1,$$

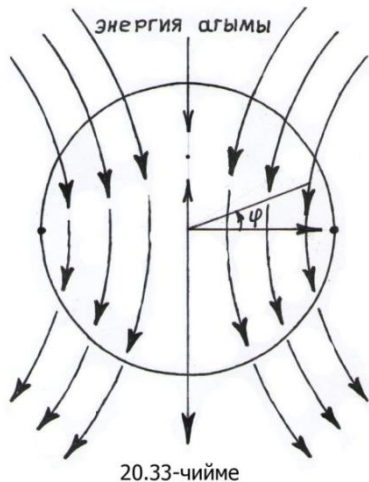
$$(ЧШ) \quad u(1, \varphi) = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

2. Чектеги 2 – түрдөгү маселе же Неймандын маселесинде ∂D чегинен агып өтүп жаткан агымга пропорционалдуу болгон, чекке сырттан түшүрүлгөн нормалдын багыты боюнча алынган туундунун берилген маанисине жараша чыгарылышты табуу маселеси коюлат. Бул маселе ∂D чегинен жылуулук, электрондордун ж.б. агымдары өтүп турган учурда, стационардык жылуулук өткөрүмдүүлүктүн жана электростатиканын теңдемелерине коюлуучу жалпы маселе болот. Мисалы, тегеректин чегинен агып өтүүчү жылуулук агымы

$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin \varphi$ мыйзамы менен жүрсө, анда тегеректин ичиндеги чекиттерде жылуулуктун бөлүштүрүлүшү, Неймандын

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r} = \sin \varphi, & r = 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \quad \text{маселесин чыгарылышы менен}$$

аныкталат. Эгерде бул маселеде $0 \leq \varphi < \pi$ болсо, агым (кал./см·с) сырттан ички көздөй, ал эми $\pi \leq \varphi < 2\pi$ болсо ичтен сыртты көздөй агып жаткан болот.



Ошондой болсо да, чектен өткөн толук агым

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$$

нөлгө тең болуп, бул Неймандын маселелеринде сөзсүз аткарылуучу шарт катарында кабыл алынат. Мындан тегеректин ар бир ички чекиттериндеги температура, убакыттын жүрүшүндө өзгөрбөй кала берет деген бүтүм чыгарууга болот. 20.33 – чиймеде тегеректин ар бир ички чекитине агып кирген жана агып чыккан жылуулуктун толук саны нөлгө тең болгондуктан, чекиттеги температура турактуу болору сүрөттөлгөн.

Ошентип, чектен өткөн толук жылуулук агымы нөлгө тең болгондо гана Лапластын теңдемесине Неймандын маселесин коюуга болот. Демек, математикалык тил менен айтканда чекте

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

шарты аткарылса гана, Неймандын маселеси чыгарылышка ээ болот.

Мисалы, тегеректин ичинде коюлган

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = 1, & r = 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Неймандын маселесин чыгарылышы жок, анткени аны физикалык жактан негиздөө мүмкүн эмес, себеби областын ичиндеги турактуу бирдик агым, стационардык абалды мүнөздөгөн чыгарылышты камсыз кыла албайт.

Неймандын маселесин башка чектеги маселелерден айырмалап турган дагы бир өзгөчөлүк катарында, анын чыгарылыштарын *көп маанилүүлүгүн* айтууга болот. Мисалы, Неймандын

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = \cos 2\varphi, & r = 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \text{ маселеси, чектен өткөн}$$

толук агым нөлгө тең болгонуна карабастан, чексиз көп $u(r, \varphi)$ чыгарылыштарына ээ. Чынында эле анын кайсы бир $u(r, \varphi) = r^2 \cos 2\varphi$ чыгарылышын тапсак, ага ар кандай турактууларды кошуп жазып чексиз көп чыгарылыштарды алууга болот. Жалгыз чыгарылышты табуу үчүн, Неймандын маселесине кошумча шарттарды коюуга туура келет. Неймандын маселеси да $\Delta u = 0$ шартынын D областын ичинде же сыртында аткарылышына жараша ички же сырткы маселелер деп бөлүнүшүп, чыгарылышка ∂D – чегинде шарт коюлат.

3. Чектеги 3 – түрдөгү маселени жалпы учурда, тегиздикте берилген D областын ∂D чегиндеги чекиттерде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h[u - f_3(x, y)] \right) \Big|_{(x, y) \in \partial D} = 0 \text{ шарты аткарыла тургандай } u(x, y)$$

чыгарылышын табуу деп түшүнүп, аны жогорудагы биринчи жана экинчи түрдөгү маселелердин кайсы бир деңгээлдеги биригүүсү катарында эсептейбиз. Мында h – белгилүү турактуу, $f_3(x, y)$ – белгилүү функция. Чектеги 3 – түрдөгү маселени

$\frac{\partial u}{\partial n} = -h[u - f_3]$ көрүнүштө жазып, ага ылайык чектен D областына кирип жаткан агымдын чоңдугу, ∂D чекиттериндеги u – температурасы менен ∂D чек арада берилген f_3 температурасын айырмасына пропорционалдуу болорун көрөбүз. Мындан $h > 0$ болгондо:

- 1) Эгерде ∂D чегиндеги u – температурасы, чөйрөнүн ∂D чегиндеги f_3 – температурасынан чоң болсо, анда жылуулук областтан агып чыгып жаткан болот.
- 2) Эгерде ∂D чегинде u – температурасы f_3 төн ашып кетпесе, анда жылуулук областка агып кирет.

Албетте, мындай жылуулук алмашуулар Ньютондун жылуулук алмашуу мыйзамы боюнча жүрүп, стационардык жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган үч түрдөгү бардык маселелер табыгый мүнөзгө ээ болушат.

20.4.3 Лапластын теңдемесине тегеректе коюлган Дрихленин ички маселесин чыгаруу

Эки өлчөмдүү мейкиндикте берилген Лапластын (94) теңдемесин полярдык координаталарда жазып, жаңы өзгөрүлмөлүү $u(r, \varphi)$ – белгисиз функциясы катышкан теңдемеге тегеректин чегиндеги шарттар менен берилген

$$\begin{aligned} \text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u &\equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < 1, \\ \text{(ЧШ)} \quad u(1, \varphi) &= g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (95)$$

чектеги I – түрдөгү маселени же Дрихленин ички маселесин чыгаралы.

Фурьенин өзгөрүлмөлөргө ажыратуу ыкмасы менен чыгаруу

Көбүнчө Лапластын теңдемесин *цилиндрдик, сфералык симметриядагы* чыгарылыштарын, б.а. жалгыз гана r ден көз каранды болгон $u(r)$ көрүнүштөгү чыгарылыштарын табуу маселери каралат. Бул учурда $u(r, \varphi)$ чечими, бардык φ багыттары үчүн бирдей болгондуктан, теңдемеде φ турактуу сан катары катышат.

► Адегенде Лапластын теңдемесин тегиздиктеги $u(r)$ – *цилиндрдик симметриялуу* (айланма симметриялуу) чыгарылышын табабыз. Демек, (95) маселесиндеги

$$\text{(ЖТДТ) ны } u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

көрүнүшүндө жазып, акыркы кадимки дифференциалдык теңдемени интегралдагандан кийин

$u(r) = c_1 \ln r + c_2$, (c_1, c_2 – эркин турактуулар) чыгарылыштарын аныктайбыз. Эгерде $c_1 = -1, c_2 = 0$ десек, анда Лапластын теңдемесин эки өлчөмдүү мейкиндиктеги *фундаментальдык*

чыгарылышы деп аталышкан $u_0(r) = \ln \frac{1}{r}$, ал эми $c_1 = 1, c_2 = 0$ десек, $u_0(r) = \ln r$ функцияларын табууга болот. Бул функциялар, тегиздиктин $r = 0$ чекитинен башка бардык чекиттерде Лапластын $\Delta u = 0$ теңдемесин канааттандырып, $r \rightarrow 0$ жакындаганда $u_0 \rightarrow \infty$ чексиз чоңоюшат.

2 – кадамда (95) маселедеги (ЖТДТ) де өзгөрүлмөлөрдү

$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ажыратып, Эйлердин

теңдемеси деп аталган $r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$

жана экинчи бир $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$ кадимки дифференциалдык теңдемелерге ээ болобуз. Мында бөлүүнүн коэффициенти λ оң сан экендигин көрсөтүү үчүн, аны λ^2 деп жаздык. Эгерде $\lambda < 0$ десек, анда $\Phi(\varphi)$ мезгилсиз функция болуп калат.

КДТ лардын биринчиси же Эйлердин теңдемеси:

1) $\lambda = 0$ болгондо $r^2 R'' + rR' = 0$ же $rR'' + R' = 0$ көрүнүшкө келип,

$V(r) = R'(r)$ белгилөөсүнөн кийин $rV' + V = 0$ сызыктуу теңдеменин чыгарылышы $V(r) = \frac{c_1}{r}$ табылат. Мындан $R(r) = c_1 \ln r + c_2$ чыгарылышын аныктайбыз.

2) $\lambda > 0$ болгондо $r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$ теңдемеси келип чыгып, анын чыгарылышы

$R(r) = r^\alpha$ көрүнүштө изделет. Болжолдонгон чыгарылыштын тиешелүү туундуларын эсептеп, теңдемеге койгон соң, r^α ге бөлүп $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ же $\alpha_{1,2} = \pm \lambda$ болгондо $R(r) = a r^\lambda + b r^{-\lambda}$ көрүнүштөгү чыгарылышка ээ болобуз. Мында a, b – эркин турактуулар.

3) КДТ лардын экинчиси $\lambda = 0$ болгондо $\Phi'' = 0$ теңдемесине айланып, $\Phi(\varphi) = C_1 + C_2 \varphi$ чыгарылышына ээ болот.

4) $\lambda > 0$ болгондо, $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0$ теңдемесин чыгарылышы $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda \varphi + C_2 \sin \lambda \varphi$ көрүнүштө табылат.

Ошентип, өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган КДТ лердин

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow \begin{cases} R(r) = c_1 \ln r + c_2, \\ \Phi(\varphi) = C_1 + C_2 \varphi, \end{cases} \\ \lambda > 0 &\Rightarrow \begin{cases} R(r) = a r^\lambda + b r^{-\lambda}, \\ \Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda \varphi + C_2 \sin \lambda \varphi \end{cases} \end{aligned} \quad (96)$$

чечимдерине ээ болобуз. $\Phi(\varphi)$ функциясы 2π мезгилдүү болушу керек, ошондуктан $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ маанилерин кабыл алат.

$\lambda \geq 0$ болгондо, (96) дан эркин турактууларды $\ln r, r^{-\lambda}$ чоңдуктары таштала тургандай нөл деп тандап, өзгөрүлмөлөргө ажыратылган эки

$R(r) = a r^n$ жана $\Phi(\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$ чыгарылыштардын турактууга чейинки тактыктагы көбөйтүндүсүнөн турган

$$u_n(r, \varphi) = r^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

функциялары, Лапластын теңдемесин бардык элементардык

чыгарылыштары болоруна ишенебиз.

Ошентип Дрихленин (95) маселесин чыгарылышын, элементардык чыгарылыштардын чексиз суммасы же Фурьенин катары

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \quad (97)$$

сыяктуу жаза алабыз.

(97) ге (ЧШ) ны коюу менен Фурьенин a_n, b_n коэффициенттерин аныктоого болот. Ал үчүн оболу (ЧШ) да берилген $g(\varphi)$ функциясын

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \text{ Фурьенин катарына ажыратып,}$$

$$u(1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] = g(\varphi)$$

теңдештигин орнотобуз. Мындан Фурьенин коэффициенттерин табуу эрежелерине таянып,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (*)$$

коэффициенттери аныкталат.

Физикалык жактан, (95) маселени – чек арадагы потенциалдын бөлүштүрүлүшү боюнча, тегеректин ичиндеги электростатикалык потенциалды аныктоо маселеси катары кароого болот. Мындан сырткары көрсөтмөлүү мисал катары, чек арасы $g(\varphi)$ – функциясын алкак формасындагы графигине окшош зымга керилип турган самын көбүгүнүн чекиттерин көтөрүлүү абалдары, (95) маселенин чыгарылыштары менен сүрөттөлөрүн айта кетүүгө болот ($g(\varphi)$ – чеги сезилгис кыймылда болгондо).

$$\text{Мисал. } \begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, & (\text{ЖТДТ}) \\ u(1, \varphi) = 1 + \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \cos 4\varphi & (\text{ЧШ}) \end{cases}$$

маселесинде $g(\varphi)$ функциясы Фурьенин катарына ажыратылып жазылгандыктан, (97) чыгарылышын

$$u(r, \varphi) = 1 + r \sin \varphi + \frac{r^3}{2} \sin 3\varphi + r^4 \cos 4\varphi$$

көрүнүштө жазабыз. Мында Фурьенин коэффициенттери

$a_0 = 1, a_4 = 1, b_1 = 1, b_3 = 0,5$ көрүнүштөрдө жазылышат. ◀

20.4.4 Пуассондун интегралдык формуласы

Кийинки кадамда, Лапластын теңдемесине коюлган Дрихленин (95) маселесин өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен табылган (97) чыгарылышын, Пуассондун интегралдык формасына келтиребиз. Эркин алынган R радиустуу тегеректе (95) чыгарылышын

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \quad (97)^A$$

көрүнүштө жазып, ага a_n, b_n коэффициенттерин (*) маанилерин койсок,

$$\begin{aligned}
 u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \cdot \cos n\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \cdot \sin n\varphi \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \int_0^{2\pi} g(\alpha) \cdot [\cos n\alpha \cos n\varphi + \sin n\alpha \sin n\varphi] d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos[n(\varphi - \alpha)] \right\} g(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n [e^{in(\varphi-\alpha)} + e^{-in(\varphi-\alpha)}] \right\} g(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{i(\varphi-\alpha)}}{R} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{-i(\varphi-\alpha)}}{R} \right)^n \right\} g(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \frac{re^{i(\varphi-\alpha)}}{R - re^{in(\varphi-\alpha)}} + \frac{re^{-i(\varphi-\alpha)}}{R - re^{-in(\varphi-\alpha)}} \right\} g(\alpha) d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \right] g(\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

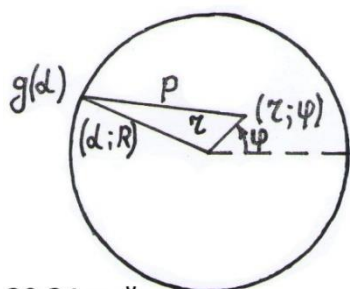
келип чыгат. Ошентип, айрым алгебралык түзүүлөргө, тригонометриялык формулаларга жана чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиясын $|q| < 1 \Rightarrow \frac{b_1}{1-q} = \sum q^n$ суммасына таянып, Дрихленин ички (95) маселесин (97)^A чыгарылышын Пуассондун интегралдык формуласы деп аталган

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \right] g(\alpha) d\alpha, \quad r < R \quad (98)$$

көрүнүшкө келтирдик. Ал эми Дрихленин сырткы маселеси үчүн Пуассондун формуласы

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \right] g(\alpha) d\alpha, \quad r > R \quad (98)^A$$

көрүнүштө жазылат.



20.34-чийме

Пуассондун (98) формуласы боюнча $(r; \varphi)$ чекитиндеги u потенциалы, чек арадагы потенциалдын *салмактан тандалган орточосуна* барабар болот. *Салмак функциясы* – Пуассондун ядросу деп аталып,

$$\text{Пуассондун ядросу} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\varphi - \alpha) + r^2}$$

көрүнүштө жазылат. Мындан кайсы бир чекиттеги потенциал, жакынкы коңшулаш чекиттердеги потенциалдардын *салмакталган орточосуна* барабар болот деген бүтүм чыгарабыз. Ал эми Пуассондун ядросу, ар бир чекиттин жалпы потенциалга кандай үлүш кошкондугун көрсөтүп турат (20.34 – чийме).

$(r; \varphi)$ чекитине жакыныраак жайгашкан чектеги $(R; \alpha)$ чекиттеринде Пуассондун ядросу чоңоёт, анткени ядронун бөлүмү $(r; \varphi)$, $(R; \alpha)$ чекиттерин арасындагы аралыктын квадратына барабар, ал эми бул аралык кичинерсе бөлүм кичинерип, бөлчөк чоңоёт. Мындай жакындыктагы чекиттерде, (98) интегралдын маанисине $g(\alpha)$ – басандатып өчүрүүгө керектүү функция катарында кызмат кылат. Бирок, $(r; \varphi)$ чекити чекке $r = R$ болгонго чейин чексиз жакынлап келгенде, Пуассондун ядросу чексиз чоңоюп кеткендиктен, чыгарылыштын ушундай чекиттердеги маанилерин интегралдык формула менен эсептөө татаалдашып, көбүнчө катар көрүнүштөгү чыгарылышты колдонобуз.

Тегеректин борборундагы потенциалды Пуассондун (98) формуласы менен эсептесек

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha \quad \text{келип чыгып, тегеректин борборундагы}$$

потенциалдын, тегеректи курчаган айланадагы потенциалдын орточосуна барабар болорун көрөбүз.

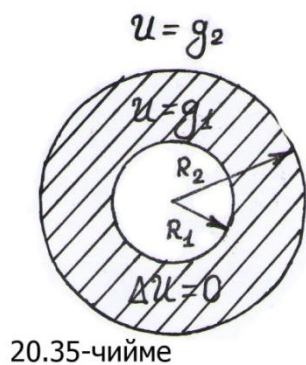
20.4.5 Алкакта коюлган Дрихленин маселеси

Айталы борборлору координата башталмасында, радиустары R_1, R_2 болгон тегиздиктеги айланалардын арасында кармалган алкакта, Лапластын теңдемесине коюлган Дрихленин

$$\begin{aligned} \text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u &\equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \\ \text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(R_1, \varphi) = g_1(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) = g_2(\varphi), \end{cases} & \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (99)$$

маселеси берилсин ($R_1 < R_2$).

Берилген маселени физикалык жактан 20.35 – чиймеде көрсөтүлгөн алкакта керилген самын көбүгүнүн формасын табуу тапшырмасы катарында кароого болот. Ошентип, $r = R_1$ менен $r = R_2$ айланаларын арасындагы алкакта аныкталган, айланалардын чекиттеринде тиешелүү түрдө $g_1(\varphi)$ менен $g_2(\varphi)$ функциялары менен дал келген $u(r, \varphi)$ функциясын табуу керек. Бул чыгарылыш – функцияны өзгөрүлмөлөрү ажыраган $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ көрүнүштө издейбиз.



Болжонгон чыгарылышты (100) маселесиндеги (ЖТДТ) га коюп, эки

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R &= 0 - \text{Эйлердин теңдемеси,} \\ \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0 \end{aligned}$$

кадимки дифференциалдык теңдемелерине ээ болобуз. Мында бөлүүнүн коэффициенти λ оң сан экендигин көрсөтүү үчүн λ^2 деп жазылган. Эгерде $\lambda < 0$ десек, анда $\Phi(\varphi)$ мезгилсиз функция болуп калат.

Жогоруда (20.4.3) каралгандай эле талкуулоолорду жүргүзүп, КДТ лардын биринчисин

$$1) \lambda = 0 \Rightarrow R(r) = a \ln r + b ,$$

$$2) \lambda > 0 \Rightarrow R(r) = a r^\lambda + b r^{-\lambda} \text{ чыгарылыштарын, ал эми экинчисин}$$

$$3) \lambda = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A + B \varphi ,$$

$$4) \lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi \text{ чыгарылыштарын табабыз.}$$

Аларды λ нын белгилерине карата топтоштуруп

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow \begin{cases} R(r) = a \ln r + b , \\ \Phi(\varphi) = A + B \varphi , \end{cases} \\ \lambda > 0 &\Rightarrow \begin{cases} R(r) = a r^\lambda + b r^{-\lambda} , \\ \Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi \end{cases} \end{aligned} \quad (96^A)$$

жазалы. $\Phi(\varphi)$ функциясы 2π мезгилдүү деп алынгандыктан, $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ маанилерин кабыл алат.

Лапластын теңдемесин чыгарылышы

$\lambda \geq 0$ болгондо, турактууларды тандоо менен (96^A) да табылган $R(r), \Phi(\varphi)$ чыгарылыштарын көбөйтүп, кураштырылган

$$\begin{aligned} &c - const., \\ &c \ln r, \\ &c r^n \cos n\varphi \quad (n=1,2,\dots), \\ &c r^n \sin n\varphi \quad (n=1,2,\dots), \\ &c r^{-n} \cos n\varphi \quad (n=1,2,\dots), \\ &c r^{-n} \sin n\varphi \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned}$$

функцияларын Лапластын теңдемесин канааттандыраарын көрөбүз.

Кураштырылган функциялардын суммасы да Лапластын теңдемесин канааттандыргандыктан, биздин учурда Лапластын теңдемесин турактууга чейинки тактыктагы чыгарылышын

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= a_0 + b_0 \ln r + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\varphi + (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\varphi \} \end{aligned} \quad (100)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Чечим катары болжолдонгон (100) суммасынан

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(R_1, \varphi) = g_1(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) = g_2(\varphi) \end{cases} \quad \text{шарттарын канааттандыра тургандай}$$

коэффициенттерди аныктайлы, ал үчүн (ЧШ) нын шарттары коюлган (100) суммасына, Фурьенин катарына ажыратылган $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$ функцияларын теңдештиребиз (20.4.3 тү кара). Натыйжада

1) a_0, b_0 – коэффициенттерин аныктоо үчүн:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) ds, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) ds; \end{cases}$$

2) a_n, b_n – коэффициенттерин аныктоо үчүн:

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) \cos ns ds, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) \cos ns ds; \end{cases} \quad (101)$$

3) A_n, B_n – коэффициенттерин аныктоо үчүн:

$$\begin{cases} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(s) \sin ns ds, \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(s) \sin ns ds \end{cases}$$

теңдемелер системаларын алабыз.

Ошентип, (101) теңдемелер системасынан белгисиз $a_0, b_0, a_n, b_n, A_n, B_n$ коэффициенттерин таап (100) гө койсок, Лапластын теңдемесине алкакта коюлган (99) маселесин чыгарылышы толугу менен табылат.

Каралган маселени чыгаруу жолун бышыктоо максатында айрым мисалдарга токтололу.

Мислдар

1. Айталы, потенциал алкактын ички $r = 1$ айланасында 0, ал эми сырткы $r = 2$ айланасында $\sin \varphi$ болсун. Анда

$$\text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$\text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(1, \varphi) = 0, \\ u(2, \varphi) = \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

маселеси келип чыгат.

► Коюлган маселени чыгарууну, (101) формулаларын пайдаланып белгисиз $a_0, b_0, a_n, b_n, A_n, B_n$ коэффициенттерин аныктоодон баштайбыз:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$A_n = \begin{cases} 2/3, & \text{эгерде } n = 1 \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } n \geq 2 \text{ болсо,} \end{cases}$$

$$B_n = \begin{cases} -2/3, & \text{эгерде } n = 1 \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } n \geq 2 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Аныкталган коэффициенттерди (100) функциясына коюп, (ЧШ) ларга баш ийген Лапластын теңдемесин чыгарылышын же

потенциалдын $u(r, \varphi) = \frac{2}{3}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi$ көрүнүштөгү функция болорун көрөбүз. ◀

2. Алкактын чектеринде турактуу болгон потенциалды аныктоого карата берилген

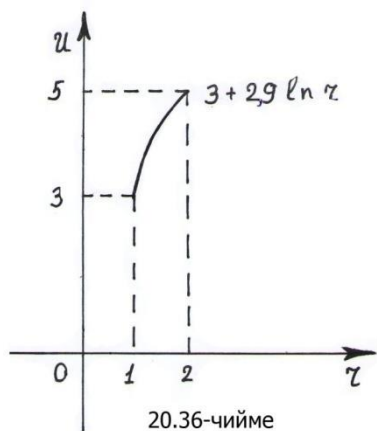
$$\text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$\text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(1, \varphi) = 3, \\ u(2, \varphi) = 5, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

маселени чыгаралы.

► Жогорудагы мисалды чыгаргандай эле, белгисиз коэффициенттерди

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln 1 &= 3, \\ a_0 + b_0 \ln 2 &= 6 \end{aligned} \quad \text{системасынан}$$



$a_0 = 3, b_0 = 2/\ln 2 \approx 2,9$, ал эми

$$\begin{aligned} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} &= 0, \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} &= 0 \end{aligned} \quad \text{системасынан}$$

$A_n = B_n = 0$ көрүнүштөрдө аныктап, (ЧШ) ларга баш ийген Лапласдын теңдемесин чыгарылышы болгон $u(r, \varphi) = 3 + 2,9 \ln r$ функциясын же потенциалды таап, алкактын ичинде потенциалдын радиустан көз карандылык сызыгы катарындагы графигин,

20.36 – чиймеде көрсөтөбүз. ◀

3. Лапласдын теңдемесине алкакта коюлган дагы бир

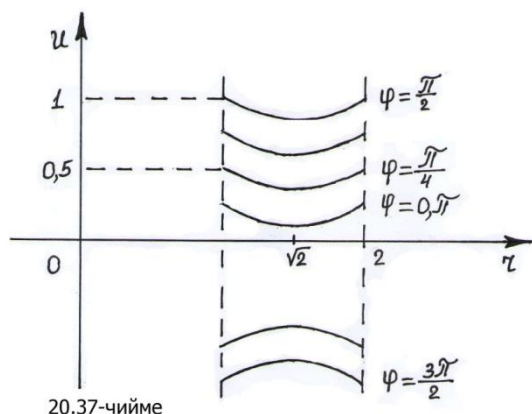
$$\text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$\text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(1, \varphi) = \sin \varphi, \\ u(2, \varphi) = \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

маселени чыгаралы. Белгисиз коэффициенттерди аныктоо үчүн түзүлгөн (101) системаларын пайдаланып

$a_0 = b_0 = 0; \forall n: a_n = b_n = 0; \forall n \geq 2: A_n = B_n = 0$ болорун, ал эми

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi, \\ 2A_1 + B_1/2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = 1, \\ 2A_1 + B_1/2 = 1 \end{cases}$$



системасынан $A_1 = \frac{1}{3}, B_1 = \frac{2}{3}$

табыларын көрөбүз. Табылган коэффициенттерди (100) катарына коюп, мисалдагы маселенин

чыгарылышы $u(r, \varphi) = \left(\frac{r}{3} + \frac{2}{3r}\right) \sin \varphi$ функциясы болоруна ынанабыз. Ар

кандай φ бурчтарына туура келген учурлардагы чыгарылыштын фрагменттерин $u(1, \varphi) = \sin \varphi$ менен $u(2, \varphi) = \sin \varphi$ лердин арасына керилген самын көбүгүн формасын элестеткен ийрилер сыяктуу 20.37 – чиймеде көрсөтөбүз.

20.4.6 Дрихленин сырткы маселеси

Тегиздиктеги Лапластын теңдемесине коюлган Дрихленин

$$(ЖТДТ) \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < \infty,$$

$$(ЧШ) \quad u(1, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

сырткы маселесин чыгаралы.

► Берилген Дрихленин сырткы маселеси да ички маселе сыяктуу эле өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу ыкмасы менен чечилет. Болгону өзгөрүлмөлөргө карата ажыратылган эки кадимки дифференциалдык теңдемелердин (96) көрүнүштөгү чыгарылыштарынан $r \rightarrow \infty$ умтулганда чексиз чоңоюп кетүүчү $\ln r$, $r^n \cos n\varphi$, $r^n \sin n\varphi$ чоңдуктарын пайда кылуучу кошулуучуларды таштап жиберебиз (турактууларды нөл деп тандап). Натыйжада

$$u_n(r, \varphi) = r^{-n}[a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

элементардык чыгарылыштарына ээ болуп, маселенин чыгарылышы деп

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] \quad (102)$$

катарын суммасы болгон $u(r, \varphi)$ функциясын алабыз.

(102) чечимге (ЧШ) ны коюп, келип чыккан

$$u(1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^{-n} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] = g(\varphi)$$

теңдештикти пайдаланып, $g(\varphi)$ функциясын

$$u(1, \varphi) = g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] - \text{Фурьенин катарына}$$

ажыратабыз. Ал эми Фурьенин коэффициенттерин

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (*)$$

формулалары менен аныктайбыз. ◀

Мисалдар

1. Дрихленин сырткы

(ЖТДТ) $\Delta u = 0, \quad 1 < r < \infty,$
 (ЧШ) $u(1, \varphi) = 1 + \sin \varphi + \cos 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ маселеси,

$u(1, \varphi) = g(\varphi) = 1 + \sin \varphi + \cos 3\varphi$ көрүнүштөгү Фурьенин катарына ажырагандыктан,

$u(r, \varphi) = 1 + \frac{1}{r} \sin \varphi + \frac{1}{r^3} \cos 3\varphi$ чыгарылышына ээ болот.

2. Дрихленин (ЖТДТ) $\Delta u = 0, \quad 1 < r < \infty,$
 (ЧШ) $u(1, \varphi) = \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ сырткы

маселеси $u(r, \varphi) = \frac{1}{r^4} \cos 4\varphi$ чыгарылышына ээ болот.

3. Борбору координата башталмасында, радиусу 4 болгон тегеректин ичинде гармоникалык болуп, аны чектеген айланада

$u(2, \varphi) = 3 + 5 \cos \varphi$ көрүнүштө болгон функцияны тапкыла.

► Берилген маселени математикалык жактан Дрихленин ички маселеси

(ЖТДТ) $\Delta u = 0, \quad 0 < r < 2,$
 (ЧШ) $u(2, \varphi) = 3 + 5 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

катарында сүрөттөөгө болот. Анын чыгарылышын

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi]$$

көрүнүштө издеп, ага (ЧШ) ны койсок

$$u(2, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi] = 3 + 5 \cos \varphi$$

теңдештиги келип чыгат. Мындан $1, \sin \varphi, \cos \varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi, \dots$

функциялары ортогоналдык системаны түзгөндүктөн, Фурьенин коэффициенттерин (*) формулалары менен

$a_0 = 3; 2a_1 = 5; \forall n \geq 2 \Rightarrow a_n = 0; \forall n: b_n = 0$ аныктап, изделген функцияны

$$u(r, \varphi) = 3 + \frac{5}{2} \cos \varphi \text{ же } u(x, y) = 3 + \frac{5}{2} x \text{ табабыз. } \blacktriangleleft$$

20.4.7 Дрихленин бир тектүү эмес маселеси. Гриндин функциясын тургузуу

Эгерде тегиздиктин кайсы бир D областын ичинде $f(x, y)$ энергия булактары берилсе, анда D областындагы потенциалды аныктоо маселеси, колдонмо математиканын негизги маселелерин бири болуп эсептелет. Мисалы, электростатикада вольт менен эсептелген D областындагы потенциал, тыгыздыгы $f(x, y)$ болгон заряддардын ушул область боюнча бөлүштүрүлүшү менен шартталат.

Эки өлчөмдүү мейкиндиктеги D тегерегин ичинде $f(x, y)$ энергия булактары жайгашкан учурда, тегеректеги потенциалды аныктоо маселесин, математикалык тилде Пуассондун теңдемесине ∂D чегинде (айланада) коюлган нөлдүк шарттагы

$$\begin{aligned} \text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u &\equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = f(r, \varphi), \quad 0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \text{(ЧШ)} \quad u(1, \varphi) &= 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (103)$$

Дрихленин ички маселеси катарында моделдештирүүгө болот.

Ошентип (103) маселесин табылган $u(r, \varphi)$ чечими, D тегерегин ичиндеги $(r; \varphi)$ чекиттериндеги потенциалды сүрөттөйт. Ал эми нөлдүк (ЧШ) ны тандаганыбыздан себеби, эгерде биз жалпы учурда бир тектүү эмес (ЖТДТ) га нөлдүк эмес (ЧШ) коюлган маселени карасак, анда чектеги бир тектүү эмес шарттардын таасирин Пуассондун формуласы менен эле аныктоого болмок.

Бир тектүү эмес эллиптикалык ЖТДТ жөнүндө кандайдыр бир түшүнүк алуу үчүн, Пуассондун теңдемесине коюлган

$$(ЖТДТ) \Delta u = -q, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad q - \text{оң турактуу,}$$

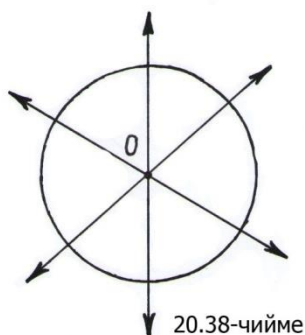
$$(ЧШ) \quad u(1, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

маселенин чыгарылышына графикалык сүрөттөмө берели. Коюлган маселеге ылайык, тегеректин чегиндеги ∂D – айланада потенциал (б.а. температура) нөлгө тең болгондой кармалат, ал эми тегеректин бардык чекиттеринде лапласиан "-q" га барабар. D областын кайсы бир p чекитиндеги $u(p)$ – потенциалы, ∂D – айланадагы потенциалдардын салмактап тандалган орточосуна барабар болуп, $\Delta u(p)$ лапласианы айтылган эки потенциалдардын $u(p) - u(r, \varphi)|_{(r, \varphi) \in \partial D}$ айырмасын өлчөө көрсөткүчү (бизде "-q") катарында кызмат кылат. $\Delta u < 0$ болгондуктан, Пуассондун теңдемеси $u(r, \varphi)$ нин төмөн карай багытталган иймек бет болорун ырастап, тегерек алкакка бекитилген жука мембрананы шамал төмөн карай иймейте үйлөп тургандай элес калтырат.

Эгерде теңдеменин оң жагы q сыяктуу турактуу болбостон ар бир чекитте өзгөрүп турган $f(x, y)$ функциясы болсо, анда иймектик да ар бир чекиттен көз каранды болгон функция болот.

Гриндин функциясын тургузуу жана (103) маселенин чыгаруу кадамдарын жасоодон мурда, энергиянын чекиттик булактарын жана агымдарын потенциалдары түшүнүгүн киргизебиз.

Чекиттик булактардын жана агымдардын потенциалдары



Бир тектүү эмес сызыктуу теңдемени чыгаруу үчүн, ага чекиттеги булакка карата коюлган маселени чыгаруу жетиштүү. Анткени жалпы учурдагы маселенин чыгарылышын, чекиттеги булактардын таасирлерин суммасына коюлган маселенин чыгарылышы катары аныктоого болот. Ошентип, каралган областтын чекитиндеги энергия булагы (же агым) пайда кылган потенциалды аныктоо маселенин карайбыз. Мындай булактарга

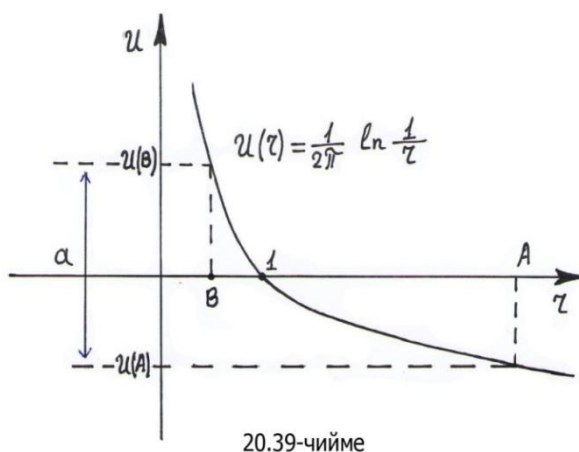
ар кандай түшүндүрмөлөрдү берүүгө болот. Мисалы, жылуулук өткөрүмдүүлүк теориясында энергия булагын жылуулук берип жаткан чекит, ал эми чекиттеги агымды жылуулукту сиңирип жутуп турган чекит катары сүрөттөсө болот. Электростатикада болсо, чекиттеги булак катарында айрым чекитте бөлүнүп каралган оң “протон” зарядын, чекиттеги агым катарында терс “электрон” зарядын алууга болот. Кайсыл мисал болсо да, чекиттик булактын таасири астында пайда болгон эки өлчөмдүү u потенциалы табылган болот.

Айталы, кайсы бир чекиттик “+q” булагы координата башталмасына жайгаштырылсын, анда бул чекиттен бөлүнгөн жылуулук (же электр талаасы), чекиттин тегерегине радиустук түздөрдү бойлоп тарары белгилүү (20.38 – чийме). Ошондой эле, борбору координата башталмасында, радиусу r болгон тегеректин айлана сызыгы аркылуу өткөн толук агымды

$$\text{Толук агым} = - \int_0^{2\pi} u_r(r)r d\varphi = -u_r(r)r \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi r u_r(r)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Экинчи жактан энергиянын сакталуу мыйзамы боюнча толук агым, тегеректин ичинде жайгашкан жылуулуктун санына

$$-2\pi r u_r(r) = q$$



барабар болушу керек. Бул теңдештирүүчү дифференциалдык теңдемени $u(r)$ функциясына карата чыгарып, 20.39 – чиймеде графиги көрсөтүлгөн

$$u(r) = -\frac{q}{2\pi} \ln r = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

чыгарылышына ээ болобуз. Чиймеде эки өлчөмдүү учурдагы чекиттик заряддын потенциалы, зарядды A чекитинен B чекитине которууда аткарылган a – жумушу катары сүрөттөлөт. Анткени

электростатикада потенциалдардын $u(B) - u(A)$ айырмасы, бирдик зарядды A чекитинен B чекитине которууга зарыл болгон жумушка барабар. Чекиттик агымды терс булак катары эсептеп, чоңдугу " $-q$ " болгон чекиттеги агым

$$u(r) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \text{ потенциалын түзөрүн көрөбүз.}$$

Кийинки кадамда бир тектүү эмес эллиптикалык теңдемени Гриндин функциясын түзүү ыкмасы менен чыгарууга киришебиз.

Тегеректеги Пуассондун теңдемеси

Айталы, Пуассондун теңдемесине тегеректин ичинде коюлган

$$\text{(ЖТДТ)} \quad \Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\text{(ЧШ)} \quad u(1, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (104)$$

Дрихленин маселеси берилсин.

Берилген маселени Гриндин функциясын (же булактын функциясын) түзүү ыкмасы менен чыгаруу, эки кадамга бөлүнгөн аракеттер аркылуу жүргүзүлөт:

1. Тегеректин ичинен $(\rho; \theta)$ чекитин алып, ага бирдик заряд жайгаштырып, ушул заряд тарабынан түзүлүп чек арада нөлгө айланган $G(r, \varphi, \rho, \theta)$ потенциалын табабыз.

2. Теңдеменин оң жагында тыгыздыгы $f(r, \varphi)$ болгон заряддардын салмактап теңдештирилиши болгон жекече $G(r, \varphi, \rho, \theta)$ потенциалдарын бүтүндөй тегерек боюнча суммалап, натыйжада изделген чыгарылышты

$$u(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 G(r, \varphi, \rho, \theta) f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (105)$$

көрүнүштө таап, булактын функциясы $-G(r, \varphi, \rho, \theta)$ аныкталса эле, чыгарылыш толук табыларын көрөбүз.

$G(r, \varphi, \rho, \theta)$ булактын функциясын аныктоо

(104) маселесинде берилген теңдеменин $f(r, \varphi)$ оң жагын эркин тандалган $(\rho; \theta)$ чекитинде жайгашып, чоңдугу 1 ге тең болгон

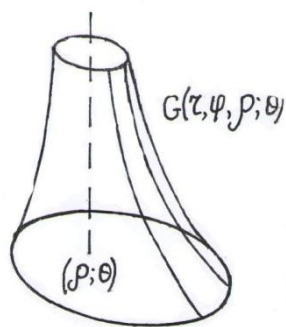
чекиттеги булак менен алмаштыралы. Математикада чекиттик булак $\delta(r - \rho, \varphi - \theta)$ дельта – функциясы менен көрсөтүлүп, биздин учурда дельта – функция бирдик заряд турган $(\rho; \theta)$ чекитинен башка бардык чекиттерде нөлгө тең деп алынат. Чекитте бирдик күч жайгашкан десек, анда дельта – функцияны $(\rho; \theta)$ чекитине аракет кылган бирдик күч деп элестетүүгө болот. Бизге, чек арадагы потенциалы нөлгө тең болгон шартта чекиттик заряддын потенциалын аныктоо тапшырмасы коюлган. Мындай шартты канааттандырган жооп – функцияны *Гриндин функциясы* же *булактын функциясы* деп атайбыз. Бул функция $(r; \varphi)$ чекитиндеги системанын, $(\rho; \theta)$ чекитине жайгаштырылган заряд – булактын таасирине берген жообун мүнөздөөчү чоңдукка барабар. *Гриндин функциясын* табуудагы негизги кыйынчылык, изделүүчү потенциалдын чек арада нөлгө айланышы болуп эсептелет. Эгерде бул шарт болбогондо, чекиттик заряддын потенциалы

$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ көрүнүштө эсептелип, жеңил эле табылмалар. Мында r заряд турган чекиттен байкоо жүргүзүү үчүн алынган чекитке чейинки аралык.

Изделүүчү потенциалга физикалык түшүндүрмө берели:

1. Эгерде жылуулук булагы $(\rho; \theta)$ чекитинде жайгашып, тегеректин чек арасында нөлдүк температура кармалып турса, анда изделүүчү потенциал, жылуулук өткөрүмдүүлүк теориясында тегеректин ичиндеги температуранын тең салмактуулугу катарында мүнөздөлөт.

2. Тегерек мембрананын чек арасында тең салмактуу абалдан четтөө нөлгө тең болуп, ал эми $(\rho; \theta)$ чекитинде мембрана эң чоң бийикке көтөрүлүп турса, анда изделүүчү потенциал мембрананын тең салмак абалынан четтөөсүн мүнөздөйт.



20.40-чийме

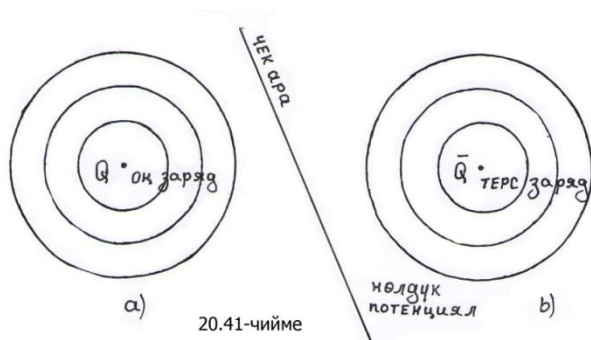
3. Эгерде тегеректин ичиндеги кайсы бир $(\rho; \theta)$ чекитине оң чекиттик заряд жайгаштырылып, тегеректин чек арасы жерге туташтырылып турактуу нөл потенциалына ээ болсо, анда электростатикада изделүүчү потенциал, тегеректин ичиндеги потенциалдын бөлүштүрүлүшүн мүнөздөйт.

20.40 – чиймеде $(\rho; \theta)$ чекитине жайгашкан $G(r, \varphi, \rho, \theta)$ – чекиттик булактын функциясын же Гриндин функциясын графиги көрсөтүлгөн.

Чечимди тургузуу

1 – кадам. $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R}$ функциясы, $Q(\rho; \theta)$ чекитинде жайгашкан бирдик заряды тарабынан $P = (r; \varphi)$ чекитинде түзүлгөн талаанын потенциалы болгондуктан, биз бул функцияны чек арада нөл боло тургандай өзгөртүүбүз керек. Мында $R = |PQ|$ аралыгы.

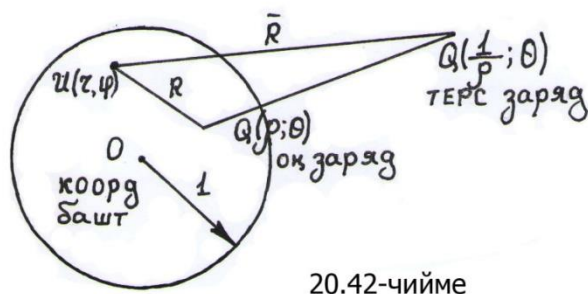
2 – кадам. Тажрыйбалардан байкалгандай, каалагандай белгидеги чекиттик заряддардын эквипотенциалдык сызыктары – айланаларды элестетишет (20.41 – чийме).



Гриндин функциясын тургузуунун негизги идеясы төмөндөгүдөй:

тегеректин сыртына, $r = 1$ чектеги айлана боюнча өткөн толук агым турактуу боло тургандай башка белгидеги бир заряд жайгаштырабыз. Андан

кийин чек арада нөлдүк потенциалды алуу үчүн, потенциалдан ушул турактууну кемитип жиберүүгө болот. Албетте, мындай ыкма менен табылган потенциал, $G(r, \varphi, \rho, \theta)$ функциясын бардык касиеттерине ээ болушу керек. Чектеги айлана боюнча өткөн толук агым турактуу боло



тургандай терс белгидеги зарядды, тегеректин сыртынын кайсыл жериндеги чекитке орнотуу керек экендигин көрсөтөлү. 20.41 – чиймеде эки карама – каршы белгидеги бөлүкчөлөр түзгөн талаалардын потенциалдары көрсөтүлгөн. Мында a, b –

турактуу потенциалдардын айлана – сызыктары. Салыштырмалуу түрдө

$\bar{Q} \left(\frac{1}{\rho}; \theta \right)$ чекитине терс зарядды жайгаштырсак, анда

$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{R}}$ толук потенциалы $r = 1$ айланасында

турактуу болору көрүнөт. Мында " $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{R}}$ " – кемитилип жаткан турактуу, R, \bar{R} – сандары Q, \bar{Q} заряддарынан $(r; \varphi)$ чекитине чейинки аралыктар (20.42 – чиймени кара). Ошентип, Q жана \bar{Q} заряддары $r = 1$ айланасында потенциалдын турактуулугун камсыз кылышат. $r = 1$ айланасындагы потенциалдын чоңдугу " $-\frac{1}{2\pi} \ln \rho$ " оң турактуусу менен туюнтуларын көрсөтүүгө болот.

Алынган жыйынтыктарга таянып, төмөндөгүдөй *Гриндин функциясын* тургузабыз:

$$G(r, \varphi, \rho, \theta) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R}}_{\substack{Q \text{ чекитинде} \\ \text{жайгашкан оң} \\ \text{заряддын} \\ \text{потенциалы}}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{R}}}_{\substack{\bar{Q} \text{ чекитинде} \\ \text{жайгашкан} \\ \text{терс заряддын} \\ \text{потенциалы}}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln \rho}_{\substack{\text{Чек арадагы} \\ \text{турактуу} \\ \text{потенциалды} \\ \text{кемитүү}}}. \quad (106)$$

Мында

$$R = \sqrt{r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + \rho^2}, \quad \bar{R} = \sqrt{r^2 - 2\frac{r}{\rho} \cos(\varphi - \theta) + 1/\rho^2}$$

полярдык координаталарда жазылган эки чекиттердин аралыктары.

Башында берилген (104) маселенин чыгарылышын табуу үчүн, системанын бардык импульстук аракеттерин бири – бирине коюу жана макулдаштыруу керек.

3 – кадам. Бардык импульстук аракеттердин суперпозициясын карайлы. Ал үчүн (105) чечимге $G(r, \varphi, \rho, \theta)$ тин (106) маанисин койсок, Пуассондун теңдемесине коюлган Дрихленин (104) ички маселесин *Гриндин функциясы* менен туюнтулган

$$u(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 G(r, \varphi, \rho, \theta) f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{R}} + \frac{1}{2\pi} \ln \rho \right\} f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \ln \frac{1}{R} - \ln \frac{1}{\bar{R}} + \ln \rho \right\} f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{\rho \bar{R}}{R} f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta \text{ же}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln \frac{\rho \bar{R}}{R} f(r, \varphi) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (107)$$

чечимин табабыз. Эгерде $f(r, \varphi)$ функциясы берилсе, анда (107) интегралын эсептеп, чыгарылыш болгон $u(r, \varphi)$ функциясын табууга болот.

Эскертүү. Бир тектүү теңдемеге коюлган

$$(ЖТДТ) \quad \Delta u = 0, \quad 1 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$(ЧШ) \quad u(1, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

маселени да *Гриндин функциясы* ыкмасы менен чыгарууга болот, бул учурда чечим

$$u(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r}(r, \varphi, 1, \theta) g(\theta) d\theta$$

көрүнүштө жазылат. Бул чечимдеги $\frac{\partial G}{\partial r}$ туюнтмасын айкын түрдө ачып жазсак, Пуассондун

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} \right] g(\theta) d\theta, \quad r < 1$$

интегралдык формуласына келе алабыз.

8. Көнүгүүлөр

Борбору координата башталмасында, радиусу r_0 болгон тегеректин ичинде гармоникалык функцияны тапкыла:

1. Эгерде $u|_{r=r_0} = 2 + 3 \sin \varphi$ болсо; 2. $u|_{r=r_0} = \sin^2 \varphi$ болсо;

3. Эгерде $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = A \cos \varphi$, A – турактуу болсо;

4. Эгерде $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 2 \sin^2 \varphi$ болсо;

5. Лапластын $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$, $0 < r < 1$

теңдемесине төмөндөгүдөй шарттарда коюлган Дрихленин ички маселелерин чыгаргыла:

а) $u(1, \varphi) = 1 + \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi$; б) $u(1, \varphi) = 2$; в) $u(1, \varphi) = \sin \varphi$;

г) $u(1, \varphi) = \sin 3\varphi$.

6. Лапластын $\Delta u = 0$, $1 < r < \infty$

теңдемесине коюлган Дрихленин төмөндөгү сырткы маселелерин чыгаргыла:

а) $u(1, \varphi) = 1$; б) $u(1, \varphi) = 1 + \cos 3\varphi$; в) $u(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos 3\varphi$;

7. Лапластын теңдемесине коюлган Неймандын

(ЖТДТ) $\Delta u = 0$, $1 < r < \infty$,

(ЧШ) $\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

маселесин чечими, Дрихленин маселесиндей эле

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi]$$

көрүнүштө болот. Алынган чыгарылышка

$\frac{\partial u}{\partial r}(1, \varphi) = \sin \varphi$ чек ара шартын коюп, a_n, b_n – коэффициенттерин тапкыла. Табылган чечимге ар кандай турактууларды кошуп, маселенин чексиз көп чыгарылыштары бар экендигине ишенгиле.

Жооптор: 1. $u(r, \varphi) = 2 + 3 \frac{r}{r_0} \sin \varphi$; 2. $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cos 2\varphi$;

3. $u(r, \varphi) = A_0 + A r \cos \varphi$, A_0 – эркин алынган турактуу;

4. Маселенин чыгарылышы жок.

§20.5 Сандык жана жакындаштырып эсептөө усулдары

Жогоруда жөнөкөй формадагы областтарда, анча татаал эмес экинчи тартиптеги сызыктуу жекече туундулуу теңдемелерди чыгаруунун салттуу ыкмаларын карадык. Бирок, бардык эле теңдемелерди каралган салттуу көрүнүшкө келтирип, үйрөнгөн усулдар менен чыгарууга болбойт. Мисалы суюктуктардын динамикасында, серпилүү теориясында жана потенциалдар теориясында келип чыккан сызыктуу эмес ЖТДТ лерди, салттуу ыкмалар менен чыгара албайбыз. Мындай учурда теңдемелерди сандык эсептөөлөр усулдарын колдонуп, жакындаштырып чыгарышат. Эсептөөлөрдө *чектүү – айырмалар* усулу менен адегенде дифференциалдык теңдеме алгебралык теңдемеге өзгөртүп түзүлүп, андан кийин атайын түзүлгөн программалар менен ЭЭМ машиналары же компьютердик технологиялар колдонулат.

20.5.1 Чектүү айырмалар менен аппроксимациялоо ыкмасы

$f(x)$ функциясын x чекитиндеги Тейлордун

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

катарына ажыралышында алгачкы эки кошулуучусун гана калтырып, калган мүчөлөрүн таштап жиберсек, анда

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \quad \text{же} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (108)$$

$f'(x)$ туундусун жакындаштырып эсептөө эрежесин алабыз. (108) эрежесин оң жагы *оң жактуу айырманын туундусу* деп аталып, x чекитиндеги биринчи тартиптеги $f'(x)$ туундусун аппроксимациялайт (жакындаштырып алмаштыра алат).

Тейлордун ажыралышында " h " ты " $-h$ " менен алмаштырып,

$$f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad (109)$$

сол жактуу айырманын туундусун алабыз.

$$f(x-h) \approx f(x) - f'(x)h \quad \text{жана}$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \quad \text{туюнтмаларын мүчөлөп кемитип,}$$

ортодогу же борбордук айырманын туундусун

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] \quad (110)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Тейлордун ажыралышында үчүнчү кошулуучуну да калтырып, төртүнчү кошулуучулардан жогоркуларын таштасак, анда жогорудагыдай эле талкуулоолорду жүргүзүү менен экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусун аппроксимациялоочу, борбордук айырманын экинчи тартиптеги туундусун

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \quad (111)$$

табабыз.

Кийинки кадамда жекече туундуларды чектүү айырмалар менен аппроксимациялоону карайлы. Ал үчүн эки өзгөрүлмөлүү функцияларды x өзгөрүлмөсү боюнча

$$u(x+h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + u_{xxx}(x, y)\frac{h^3}{3!} + \dots,$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} - u_{xxx}(x, y)\frac{h^3}{3!} + \dots$$

жана y өзгөрүлмөсү боюнча

$$u(x, y+k) = u(x, y) + u_y(x, y)k + u_{yy}(x, y)\frac{k^2}{2!} + u_{yyy}(x, y)\frac{k^3}{3!} + \dots,$$

$$u(x, y-k) = u(x, y) - u_y(x, y)k + u_{yy}(x, y)\frac{k^2}{2!} - u_{yyy}(x, y)\frac{k^3}{3!} + \dots$$

көрүнүштөрдөгү Тейлордун катарына ажыратабыз. Ажыралыштардан эки кошулуучуларды алып:

$$u_x(x, y) = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \quad u_y(x, y) = \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k};$$

үч кошулуучуларды алып:

$$u_{xx}(x, y) = \frac{1}{h^2} [u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)],$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{1}{k^2} [u(x, y + k) - 2u(x, y) + u(x, y - k)],$$

жекече туундуларды оң, сол, борбордук айырмалардын туундулары менен аппроксимациялайбыз.

20.5.2 Чектүү айырмалар ыкмасы менен Дрихленин маселесин чыгарууга мисал

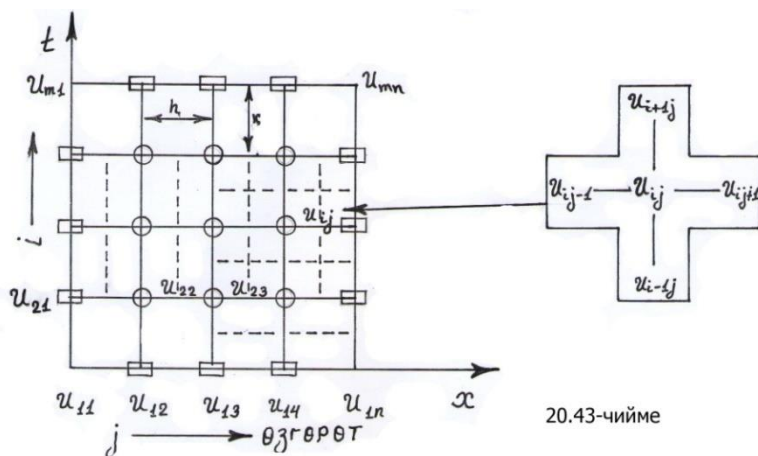
Лапластын теңдемесине, тик бурчтукта коюлган Дрихленин

$$(ЖТДТ) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u = 0, & \text{квадраттын жогорку, каптал жактарында,} \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \text{ негизинде} \end{cases}$$

маселесин чектүү айырмалар ыкмасы менен чыгаруу мисалын карайлы.

Тегиздиктеги $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тик бурчтугун Ox огун бойлоп h кадамы менен m жолу бөлүп, Oy огун бойлоп k кадамы менен n жолу бөлүп, $m \times n$ сандагы торчолорду алабыз.



Чыгарылыштын жакындаштырылган сандык маанилери изделип жаткандыктан, торчолордун ичиндеги $u(x, y)$ тин маанилерин эске албай таштап жиберип (20.43 – чийме), $u(x, y)$ функциясын торчолордун

чокуларындагы же түйүндөрдөгү маанилерин u_{ij} деп белгилеп, аларды чекиттер катарында эсептейли ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Бул учурда төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү колдонобуз:

$$u(x, y) = u_{ij},$$

$$u(x, y + k) = u_{i+1,j},$$

$$u(x, y - k) = u_{i-1,j},$$

$$u(x - h, y) = u_{i,j-1},$$

$$u(x + h, y) = u_{i,j+1},$$

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2h} [u_{i,j+1} - u_{i,j-1}],$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{2k} [u_{i+1,j} - u_{i-1,j}],$$

$$u_{xx}(x, y) = \frac{1}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}],$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{1}{k^2} [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}].$$

Колдонулган белгилөөлөрдү пайдаланып Лапластын

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

теңдемесин, чектүү айырмалар менен туюнтулган

$$\Delta u \equiv \frac{1}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}] + \frac{1}{k^2} [u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}] = 0$$

алгебралык теңдемелер системасына айландырууга болот. Эгерде тик бурчтуктун негизин жана бийиктигин тең $h = k \neq 0$ кадамдар менен бөлсөк, анда Лапластын теңдемеси

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (112)$$

көрүнүштөгү айырмалардын теңдемелер системасына келет. Акыркыны u_{ij} ге карата чыгарып

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}),$$

бардык маанилери тик бурчтуктун торчолорун ички түйүндөрү үчүн алынган u_{ij} лерди аныктайбыз. Мында u_{ij} мааниси, ага төрт тарбынан коңшулаш жайгашкан түйүндөрдөгү чыгарылыштын маанилерин орточосу менен аппроксимацияланат (20.43 –чийме). Ошондой эле, чиймеде “о” – менен торчолордун ички түйүндөрү, ал эми “□” – менен белгилүү болгон чек ара шарттары көрсөтүлгөн.

Каралган мисалда $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ тик бурчтугун туурасын жана бийиктигин $h = k = 4$ болгон торчолорго бөлсөк, анда $u_{22}, u_{23}, u_{32}, u_{33}$ белгисиздерине карата (112) системаны

$$\begin{aligned} -4u_{22} + 0 + \sin(\pi/3) + u_{23} + u_{32} &= 0, \\ -4u_{23} + u_{22} + \sin(2\pi/3) + 0 + u_{33} &= 0, \\ -4u_{32} + 0 + u_{22} + u_{33} + 0 &= 0, \\ -4u_{33} + u_{32} + u_{23} + 0 + 0 &= 0 \end{aligned} \quad (113)$$

көрүнүштө же матрицалык

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,86 \\ -0,86 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

формада жазып, Либмандын итерациялык усулун чыгарууга болот. Мында $u_{22}, u_{23}, u_{32}, u_{33}$ – ички түйүндөр, ал эми $\sin(\pi/3) = 0,86$, $\sin(2\pi/3) = 0,86$. Түзүлгөн теңдемелер системасы *итерациялык усулдар* менен чыгарылат.

Теңдемелердин саны болсо, ар дайыма торчолордун ички түйүндөрүнүн санына барабар болот. Ошондуктан бөлүүлөрдүн саны көбөйгөн сайын, (113) сыяктуу системанын тартиби өсүп бара берет. Бирок, бөлүүлөр өтө көбөйгөндө матрицанын коэффициенттерин көпчүлүгүн нөлдөр түзүшүп, *Якобинин, Гаусс – Зейделдин усулдары* сыяктуу атайын итерациялык усулдар менен чыгаруу зарылчылыгы келип чыгат.

Эскертүү.

1. Либмандын итерациялык усулу менен чыгарылышын жакындаштырылган сандык маанисин табуу эки кадамга бөлүнүп каралат:

1 – кадам. Ички түйүндөрдөгү u_{ij} чоңдуктары деп, бардык чек ара шарттарын орточосуна тең болгон сандык маанилерди алабыз.

2 – кадам. Мурдагы төрт коңшулаш чекиттердеги маанилердин орточосун, улам алмаштыруу менен торчолордун бардык ички чекиттериндеги чыгарылыштын маанилерин кайрадан эсептеп чыгабыз. Эсептөө процессин жолчолор же мамычалар боюнча жүргүзсөк да, бир канча

жолу кайталанган кадамдардан кийин, маселенин чыгарылышына кайсы бир ылдамдыкта жакындап келебиз.

2. Неймандын маселесин караган учурда, чек ара шартына кирген туундулар да чектүү айырмалар менен аппроксимацияланышат.

3. Эгерде D областы тик бурчтук эмес формада болсо, анда аны торчо менен каптап, чек арага эң жакын торчонун түйүндөрүнө чек ара шарттарын интерполяциялоо менен чечимди аппроксимациялап, калган эсептөөлөрдү тик бурчтуу область сыяктуу жүргүзө беребиз.

20.5.3 Айкын айырмалар усулу менен жылуулук өткөрүмдүүлүк жана толкундун теңдемелерин чыгаруу

Жогорку темада каралган эллиптикалык теңдеме, убакыттан көз каранды болбогон стационардык кубулушту сүрөттөгөндүктөн, тик бурчтуу областтын чегинде чыгарылышты же анын туундусун берилген мааниси боюнча, тик бурчтуктун торчолорун ички түйүндөрүндөгү чыгарылыштын $u_{i,j}$ маанилерине карата алгебралык теңдемелер системасы түзүлүп, убакыттын бардык ирмемдерине жарамдуу чыгарылыштын жакындаштырылган маанилери табылат.

Параболалык теңдеме болгон $u_t = u_{xx}$ жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесин чектүү айырмалар менен аппроксимациялап, убакыттын бир моментиндеги чыгарылышты, андан мурдагы моменттеги чыгарылыш менен *айкын туюндуруучу* формулаларды алабыз. Ошентип, параболалык жана гиперболалык теңдемелерге коюлган аралаш маселелерди убакыттын улам кийинки бардык ирмемдериндеги чечимдерди удаалаш табуу менен чыгарууга болот. Чектүү айырмалар ыкмасы менен *убакыттан көз каранды* чыгарылыштарды табуунун негизги идеясы, убакыттын баштапкы ирмеминде чыгарылыш белгилүү болсо, анда убакытты *чуркап эсептөөчү*

$t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t, \dots$ *схема* аркылуу чыгарылышты кураштыруу болот.

Берилген теңдемедеги убакыт жана мейкиндик өзгөрүлмөлөрү боюнча туундуларды, чектүү айырмалардын туундулары менен алмаштырып, $u(x, t)$ функциясын убакыттын мурдагы ирмемдериндеги

маанилери менен туюнтулган u_{ij} лер үчүн *айкын маанилерди* алабыз. Чыгаруу жолундагы мындай процесс, *чуркап эсептөөнүн айкын схемасы* деп аталат.

1. Стержендеги жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюлган

$$(ЖТДТ) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty,$$

$$(ЧШ) \quad \begin{cases} u(0, t) = 1, \\ u_x(1, t) = -[u(1, t) - g(t)], \end{cases} \quad 0 < t < \infty, \quad (114)$$

$$(БШ) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

аралаш маселесин карайлы. Маселеде стержендин сол учундагы температура 1 ге барабар болгондой алынып, оң учундагы $u(1, t)$ температурасы менен курчап турган чөйрөнүн $g(t)$ температурасын айырмасына пропорционалдуу болгон жылуулук, оң учунан чөйрө менен алмашып турары көрсөтүлгөн.

Бул маселени чектүү айырмалар ыкмасы менен чыгаруу үчүн x огун бойлоп h кадамы менен n сандагы, t огун бойлоп k кадамы менен m сандагы бөлүүлөрдүн натыйжасында, түйүндөрү

$$\begin{aligned} x_j &= jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \\ t_i &= ik, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

координаталары менен аныкталган тик бурчтуу торчолорду курабыз (20.44 – чийме). (ЧШ) жана (БШ) шарттарынан торчолордун сол жана төмөнкү жактарындагы чыгарылыштын u_{ij} маанилери белгилүү болгондуктан, калган түйүндөрдөгү u_{ij} нин маанилерин издөөгө киришебиз. Оболу (114) маселесиндеги (ЖТДТ) ны чектүү айырмалар менен аппроксимациялайбыз:

$$\begin{aligned} u_t &\approx \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)] = \frac{1}{k} [u_{i+1,j} - u_{ij}], \\ u_{xx} &\approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] = \\ &= \frac{1}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}]. \end{aligned}$$

Табылган маанилерди жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесине коюп, келип чыккан теңдештикти функциянын торчонун үстүңкү жактагы түйүнүндөгү маанисине карата чыгарып,

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + \frac{k}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}] \quad (115)$$

формуласына ээ болобуз. Бул формулада i – индекси убакыттын өзгөрүүсүн көрсөткөндүктөн, учурдагы убакыт ирмеминдеги чыгарылыштын, мурдагы ирмемдеги чыгарылыш менен туюнтулганын көрөбүз.

(114) маселесинде стержендин оң учуна коюлган (ЧШ) дагы

$u_x(1, t) = -[u(1, t) - g(t)]$ туундуну,

$$\frac{1}{h} [u_{i,n} - u_{i,n-1}] = -[u_{i,n} - g_i], \quad g_i = g(ik) \quad (116)$$

көрүнүштө аппроксимациялайбыз. Мында $g_i = g(ik)$ жана $u_x(1, t)$ деп функциянын сол жактуу айырмасын туундусу алынды, анткени оң айырмасын туундусу, функциянын торчонун сыртындагы маанилери менен туюнтулганга калтырылат. (116) теңдештигинен

$$u_{i,n} = \frac{u_{i,n-1} - hg_i}{1+h} \quad (117)$$

туюнтулусун алабыз.

(115) жана (117) формулаларына таянып айкын схема боюнча эсептөө алгоритмин түзөбүз.

1 – кадам. (115) ти колдонуп, торчолордун төмөндөн биринчи $t = \Delta t$ катмарындагы чыгарылышты

$$u_{2,j} = u_{2j} + \frac{k}{h^2} [u_{1,j+1} - 2u_{1,j} + u_{1,j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, n - 1$$

көрүнүштө табууга болот (20.44 – чийме).

2 – кадам. (117) ден

$$u_{2,n} = \frac{u_{2,n-1} - h g_2}{1+h} \text{ табылат.}$$

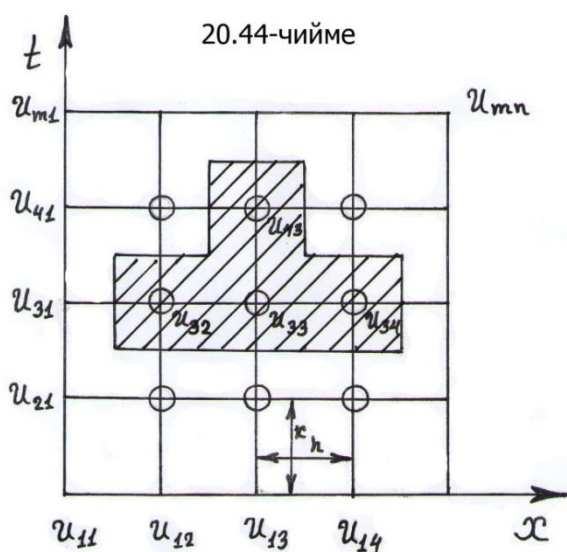
Ошентип, 1 жана 2 – кадамдарын жасоо менен $t = \Delta t$ үчүн чыгарылышты таап, андан кийин i ге бирди кошуу менен төмөндөн бир катмарга көтөрүлүп, мурдагы катмарда табылган $u_{2,j}$ лерди пайдаланып, ушул эле кадамдарды кайталаган соң экинчи $t = 2\Delta t$ катмардагы чыгарылышты да табабыз. Ушул процессти улантып, убакыттын $t = 3\Delta t, 4\Delta t, \dots$ ирмемдерине туура келген катмарлардагы чыгарылыштарды таба алабыз.

20.45 – чиймеде x огу боюнча торчолордогу түйүндөрдүн саны n , ал эми t огу боюнча түйүндөрдүн саны m болгон учурдагы айырмалардын айкын схемасы сүрөттөлгөн. Мында

$$h = 1/(n - 1), k = 1/(m - 1).$$

2. Гиперболалык теңдемелерге кирген толкундун теңдемесине коюлган

$$\begin{aligned} \text{(ЖТДТ)} \quad & u_{tt} = u_{xx}, \\ & 0 < x < 1, \\ & 0 < t < \infty, \end{aligned}$$



$$\text{(ЧШ)} \quad \begin{cases} u(0, t) = g_1(t), \\ u(1, t) = g_1(t), \end{cases} \quad 0 < t < \infty,$$

$$\text{(БШ)} \quad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

маселени, чектүү айырмалар ыкмасы менен чыгаралы. Ал үчүн жогорудагыдай торчолорго бөлүү менен u_{tt} жана u_{xx} жекече туундуларын, борбордук айырманын туундулары менен аппроксимациялайбыз

$$u_{tt} \approx \frac{1}{k^2} [u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)],$$

$$u_{xx} \approx \frac{1}{h^2} [u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)].$$

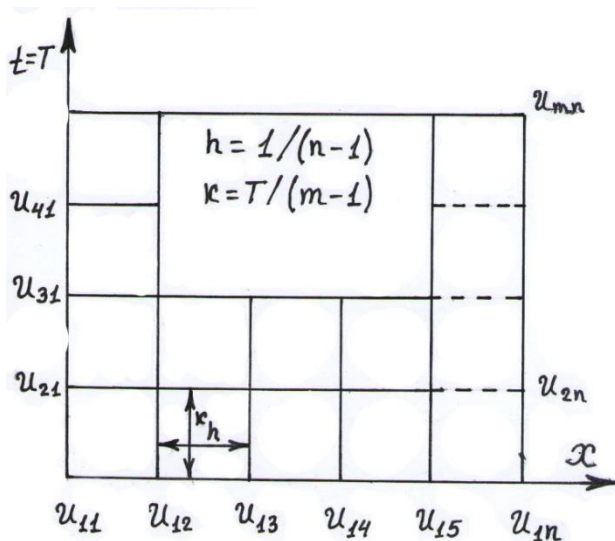
Ал эми баштапкы шартты

$$u_t(x, 0) \approx \frac{1}{k} [u(x, k) - u(x, 0)] = \frac{1}{k} [u(x, k) - \varphi(x)]$$

көрүнүштө аппроксимациялап, натыйжада $u(x, t + k)$ чоңдугун аныктоо үчүн

$$u(x, t + k) = 2u(x, t) - u(x, t - k) + (k/h)^2 [u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] \quad (118)$$

айырмалардын айкын схемасын тургузабыз. (118) ден көрүнгөндөй, убакыттын учурдагы катмарындагы чыгарылышты эсептөө үчүн, андан мурдагы ирмемдерге туура келген эки катмарлардагы чечимдерди



20.45-чийме

билүү зарыл. Эсептөөнүн башталышындагы белгилүүлөр катарында ылдамдыкка коюлган баштапкы

$$\frac{1}{k} [u(x, k) - \varphi(x)] = \psi(x)$$

шартты алып, $t = \Delta t$ ирмемине туура келген катмардагы

$$u(x, k) = \varphi(x) + k\psi(x)$$

чыгарылышты тапкан соң, кийинки катмарлардагы

чыгарылыштарды (118) айкын схемасы менен аныктай алабыз.

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999, - 88 с.
2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.
3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.
4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп», 1971, - 120 б.

5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989, - 9,75 п.л.
6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык тендемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007, - 230 б.
7. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1 – 2 – бөлүктөр. – Фрунзе:
8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для вузов. – Москва: «Наука», 1981, - 464 с.
9. С. Фарлоу. Уравнения с частными производными. – Москва: «Мир», 1985, - 383 с.
10. Зельдович Я.Б. Высшая математике для начинающих. – Москва: «Наука», 1970, - 560 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968, - 497 с.
12. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1-5– Москва: «УРСС», 2002, - 328 б.
13. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука», 1974, - 450 с.
14. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш.. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990, - 100 с.
15. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3, - с. 80-81.
15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3, - с. 161-163.
16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1, - с. 74-77.
17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшГУ», 2008, - с. 188-192.
18. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математика боюнча окума (1,2,3,4 – бөлүктөр). Ош: ОшМУ.

19. Атокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008, - 94 б.

Рамиз Рафатов, Авыт Асанов
Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ОКУМА

(5 – бөлүк)

Электрондук окуу китеп

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика

кафедрасынын 8.02.14, №4 чечими менен

окуу китеби катарында сунушталган.

Чиймелерин сызган К.Х. Абдиваитов.

Көлөмү 380 б.